



Osaka Gakuin University Repository

Title	量子ハドロンカ学の形成とブライアンD. セロー博士の業績 中性子星と原子核多体問題、そして、恩師、仲間として A memoir of Professor Brian D. Serot and the foundation of Quantum hadrodynamics
Author(s)	上地 宏 (Hiroshi Uechi)
Citation	大阪学院大学 人文自然論叢 (THE BULLETIN OF THE CULTURAL AND NATURAL SCIENCES IN OSAKA GAKUIN UNIVERSITY), 67-68 : 23-68
Issue Date	2014.03.30
Resource Type	Academic essay/ 紹介
Resource Version	
URL	
Right	
Additional Information	

量子ハドロン力学の形成とブライアンD. セロー博士の業績

中性子星と原子核多体問題、そして、恩師、仲間として

上 地 宏

A memoir of Professor Brian D. Serot and the foundation of Quantum hadrodynamics

Neutron stars and many-body theory of nuclear physics, and as a man of mentor and friend

Hiroshi Uechi

Abstract

Professor Brian D. Serot of Indiana University, Indiana USA, is a nuclear physicist internationally known in the field of theoretical many-body nuclear physics, nuclear matter and nuclear structure with effective relativistic quantum field theory for hadrons 'Quantum hadrodynamics (QHD)'. Brian, often working with J. D. Walecka, was one of the leading practitioners of QHD, and the author, Uechi, obtained his PhD. from Indiana University in 1988, under the supervision of Professor Serot.

Professor Serot, of age 57, passed away on March 2, 2012 after a long courageous battle with cancer. With sincerest prayer from my heart, I would like to commemorate his personality and scholarly styles and introduce readers to the study of neutron stars, which is one of applications of QHD. In this article, I would like to explain the first chapter of the book, **Neutron Stars: The aspect of high density matter, equations of state and related observables**, Hiroshi Uechi, Chun T. Uechi and Brian D. Serot, Nova Science Pub. 2012, which is the last written work by Professor Serot and coauthored with the authors.

The first chapter is devoted to some historical review of the fundamental problem of saturation of nuclear matter and basic preparations for many-body theory of nuclear physics and properties of neutron stars. The fundamental and theoretical relations between macroscopic and microscopic dynamical quantities and observables of neutron stars and many-body theory of nuclear matter are reviewed and discussed. The equations of state, binding energies and their relations to observables as well as self-consistency, requirements of thermodynamic consistency and density functional theory, are discussed. These fundamental topics should be examined in terms of space-time and gauge symmetries, renormalizations in modern views of theoretical physics.

セロー博士の物理的スタイルは、愉快 (fun) で、人間味あふれる面白さが新鮮な印象を与えた。しかし、彼の物理学は厳密であり、明確である。論理に厳しいが、正直であり物理的論理のどこに欠点があるかもジョークを混ぜて話すのであった。物理学は自然科学の基礎であるため、論理が厳密であり数学的方法を使う。普通の理論家は、自分の論理に欠点はなく、自分がどれ程の切れ者であるかを誇示するために、質問する純真で素朴な学生を理解させるよりも、逆に萎縮させて黙らせてしまうものである。セロー博士との出会いで、科学というものを改めて理解させられるようであった。筆者は直接、間接にセロー博士から物理学、科学の精神を学ぶことができたことに心から感謝している。

しかし、セロー博士は長年、癌による闘病生活を続けてきた。それでも多数の重要な論文と博士号の学生、研究者を指導してきている。私事ではあるが、息子である上地 T. 舜も原子核多体問題に興味を持ち、セロー博士の研究を基礎にした研究論文を発表してきた。親子二代でセロー博士に師事したことになる。彼も喜んでくれて、研究仲間の協力を得て、仕事をまとめて出来上がった専門研究書が、Neutron Stars: The aspect of high density matter, equations of state and related observables, editors., Hiroshi Uechi, Chun T. Uechi and Brian D. Serot, 2012) Nova SciencePub. である。

残念なことに、この本がほとんど完成して発刊される数ヶ月前 (2012年3月)、癌が悪化して帰らぬ人となったのである。インターネットを通して彼と連絡をしていたが、彼は‘自分の病気が良くなったら、舜の博士論文の審査委員を引き受けるよ’と、いつも良く知っている面白さあふれる調子で言っていたのであった。セロー夫人や親族の悲しみも深いものであることは察してあまりあろうが、彼を知る研究者、私たちにとっても悲しみは筆舌に尽くしがたい。

原子核理論で国際的に良く知られている研究者である、松井哲男教授 (東京大学大学院総合文化研究科) もセロー博士の同僚であり、私と共に、日本物理学会誌 (2013年、1月号) に追悼文を掲載している。

In Memory of Professor Brian D. Serot

追悼 : B. D. Serot 教授 (1955-2012)

松井 哲男 (東京大学大学院総合文化研究科, tmatsui@hep1.c.u-tokyo.ac.jp)

上地 宏 (大阪学院大学, uechi@ogu.ac.jp)

日本物理学会誌68(1), 52p, 2013-01-05

追悼文では、研究者、教育者としての彼の業績、量子ハドロン力学と Serot 教授の研究、その応用と理論的發展について短く分かりやすく説明している。

物理学会誌に掲載された内容と重複する点はあるが、さらに説明を詳しく書き加えて、

筆者がインディアナ大学で2013年3月に行われた記念シンポジウムで、Serot教授のメモリアル・トークに参加したときのことも以下に書き加えている。また、Neutron Starsの研究書に協力していただいた研究者の方々にも心から感謝する次第である。

インディアナ大学のBrian D. Serot教授は、長い間、癌との苦しい闘病生活をされてきたが、去る3月2日に遂に帰らぬ人となった。享年57歳であった。

Serot博士は1979年にスタンフォード大学でJ. Dirk Walecka (ワレチカ) 教授の指導の下で博士号を取得された後、1年間MITで研究をされ、1980年に母校スタンフォード大学に助教授として迎えられたが、1984年にはインディアナ大学に准教授として赴任された。その後26年間インディアナ大学教授として教鞭を執られ、後継研究者の育成に尽力されるとともに、同大学の核理論センターの立ち上げと発展に大きく貢献された。

Serot教授は、ハドロンの有効場の量子論に基づいた相対論的多体問題としての原子核構造・反応の研究、またそれらを敷衍した極限状態の核物質の理論的研究で国際的に良く知られている。Walecka教授との共著The Relativistic Nuclear Many-Body Problems (Advances in Nuclear Physics, vol.16, 1986)はこの分野の古典的名著として(2012年現在)nucl-thで歴代2番目に多い引用数を得ている(実験データに関する論文の引用数が1番目であるが、理論物理学書での引用数では他に例がない)。

Serot教授はこのハドロン有効理論を、クォーク・グルーオンの相互作用を記述する量子色力学(QCD)に対置して、量子ハドロン力学(QHD)と呼ばれたが、中間子場の平均場近似によって良く知られた原子核の殻構造のスペクトルを非常に現実的に再現することを示された。このアプローチはもともとWalecka教授によって、中性子星の内部に存在する高密度核物質を記述する為に考案されたものであるが、Serot教授は最初の模型になかった π 中間子場や ρ 中間子場の効果、カイラル対称性や非線形相互作用の効果を取り入れて拡張され、低エネルギー核現象をより統一的に記述する理論へと発展させる努力をされてきた。最近では、核多体問題におけるこのようなハドロンの



B. D. Serot 教授 (1955-2012),
photo from IU web-site.

の有効理論がより一般的に可能なハドロン相互作用から非線形相互作用の丸め込み(truncation)によってどのようにあられるか、またより基本的にはQCDによって記述されるクォーク・グルーオンの自由度からどのように導出されるかという難題にも取り組まれている。残念ながらこの最後の研究は未完となってしまったが、それは今日の原子核

理論のもっとも基本的な課題となっている。

Serot 教授は、教育面でも、周到に準備された明解な講義をされることで定評があり、学生から敬愛される思いやりのある教師であった。Serot 教授が残された詳細な美しい手書きの講義ノートは、師である Walecka 教授の名講義ノートの伝統を受け継いだ完璧なものであり、大学院レベルでの講義ノートのお手本である。多くの物理関係の大学院生や研究者には、A. L. Fetter and J. D. Walecka 共著の



ブライアン D. セロー教授記念シンポジウム
インディアナ大学核物理研究所において
筆者講演 2013 年 3 月

‘Quantum Theory of Many-Particle Systems’ などの専門書を知る人も多いであろう。

筆者の一人である上地が、インディアナ大学博士課程の頃、Serot 教授は、大学院の学生から ‘The best instructor’、最優秀教授賞を受けられ感謝されている。その後にも表彰される機会があったことを聞いている程、大学院の学生たちから敬愛される個性のある教授であった。

最後に、Serot 教授は、日本国内の共同研究者とともに、原子核理論と中性子星、状態方程式と熱力学的無撞着性、超新星など高密度物質についての総合報告、Neutron Stars: The aspect of high density matter, equations of state and observables (eds., H. Uechi, S. T. Uechi and B. D. Serot, 2012) の出版を企画して、有効場の理論、バリオン理論とクォーク理論に関する章を担当執筆された。これは Serot 教授の最後の著作となってしまった。かつてインディアナ大学で Serot 教授の指導を受けた編集者の一人、上地は、夫人の Rose さんから、この本へ寄稿できたことを病床からとても喜ばれていた、とお聞きし感無量である。

Serot 博士のあまりに早い逝去を悼み、博士のご冥福を心より祈りたい。

米国物理学会誌 Physics Today に掲載された博士の同僚による追悼文は次のサイトから得ることができる。<http://www.indiana.edu/iubphys/faculty/serot.shtml>

2013年3月に、セロー博士のメモリアル・シンポジウムがインディアナ大学で開かれた。その時のスケジュールであるが、日本からは、東京大学の松井教授と、セロー博士の最後の著作となる仕事をしていたということで、私も参加することになった（筆者のメモリアル・トークは、2：45～3：15の午後のセッション）。

Neutron Stars の研究書は、原子核物理学における核物質理論の中性子星研究への応用であるが、中性子星の研究は、原子核理論の整合性、自己無撞着性にとって重要な理論的研究の実験室ともなっている。国際的に知られている彼の業績の一部ではあるが、多くの研究者を指導して分野の発展に寄与している。筆者はその機会に巡り合えて、科学の素晴

らしさを味わうことができたことに心から感謝している。

私たちとの仕事が最後の仕事となってしまったのであるが、ここに、Neutron Stars の第 1 章を紹介して、偉大な師としての、セロー博士に敬意を表したい。

この研究書は、中性子星と核物質の研究に貢献してきている、以下の研究者達の協力により完成している T. Maruyama (日本原子力研究開発機構)、T. Muto (千葉工業大学)、T. Tatsumi (京都大学)、S. Yamada (早稲

田大学)、N. Yasutake (国立天文台)。ここに、記して感謝いたします。

著者らは、Neutron Stars の著書の Preface で、May physics be beautiful as ever like cherry blossoms. Osaka, Japan, in April, 2011. (桜の花が美しく咲いてきたように、物理学もそうであることを祈る、2011年4月大阪にて。)

と記している。セロー博士の物理学を学んできた筆者の実感である。

原著は、10章に及ぶ研究書であるが、第 1 章を筆者が担当して、Serot 博士、Walecka 博士等が育てた量子ハドロン力学の歴史と理論的な目的、理論計算の少し詳細な準備をするように努めている。第 1 章を紹介するが、セロー博士の研究と、この分野の研究の面白さと深さを伝えることができたなら、筆者の望外の喜びである。

中性子星：高密度物質の様相、状態方程式と観測量

第 1 章 巨視的な観測量と微視的な観測量との相関

この章では巨視的、微視的な力学量、観測量の基本的、理論的な関係について再検討し議論をする。また、理論の自己無撞着性、熱力学的整合性と密度汎関数法はもちろんのこと、状態方程式、束縛エネルギーに関連した観測量の自己無撞着性について議論をする。

Schedule	
Center for Exploration of Energy and Matter (CEEM) 2401 N. Milo E. Sampson Lane Bloomington, IN 47408 Tel: (812) 855-9665	
8:30-9:00	Tim Londergan, Welcome, Introduction, and Remarks from Dirk Walecka
9:05-9:35	George Walker, Cleveland State University, <i>Brian Serot: Scholar, Colleague, and Friend</i>
9:45-10:15	Charles Horowitz, Indiana University, <i>Brian and Relativistic Mean Field Theory</i>
10:20-10:40	Coffee Break, CEEM Lounge
10:40-11:10	Dick Furnstahl, Ohio State University, <i>QHD: Evolution and Revolution</i>
11:20-11:50	Tetsuo Matsui, University of Tokyo, <i>Remembering Brian: Passion for Perfection</i>
12:00-1:00	Lunch, CEEM Lounge
1:00-1:30	Ray Bishop, University of Manchester, <i>Brian Serot - His Memeology</i>
1:35-2:05	Jorge Piekarewicz, Florida State University, <i>Brian's Stars</i>
2:10-2:40	James Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute, <i>An Experimentalist's Debt to Brian</i>
2:45-3:15	Hiroshi Uechi, Osaka Gakuin University, <i>Brian's Effective Chiral Model and Neutron Stars</i>
3:25	Bus to Swain West
Department of Physics 727 E. Third Street Bloomington, IN 47405 Tel: (812) 855-1247	
3:35	Pre-colloquium coffee, Swain West 113
4:00-5:15	The Joseph and Sophia Konopinski Colloquia Series, Tetsuo Matsui, University of Tokyo, <i>Exploring Extreme States of Matter</i>
6:30	Symposium Dinner, Chapman's Restaurant, 4506 East 3rd Street

2013 年 3 月、セロー博士のシンポジウムのスケジュール

これらの基本的なトピックは、時空やゲージ対称性、繰り込み理論といった現代物理学の理論的観点から、さらに研究、分析されていくべき問題である。

1 核物理と中性子星

中性子星の歴史、観測量については多数の論文などが出版されており、多くの物理量が具体的に理解されつつあるが、この章では中性子星の総合的なレビューをすることが目的ではない。第1章として、中性子星と核物理理論の重要な関係を原子核多体問題の観点から簡潔に述べることを目的である [1-5]。

中性子星は高密度の天体で、重い恒星が寿命を迎え、超新星爆発を起こす際の重力崩壊によって形成されると予想されている。中性子星は、文字が示すように、中性子により構成されていて、中性子や陽子によるパウリ (Pauli) 排他原理により重力崩壊に逆らっていて、つまり、重力崩壊による力と核子密度によるフェルミエネルギーの力のバランスで成り立つと考えられている。以上より、この本では核子、ハイペロン、クォークといった強い相互作用をする粒子の多体系と高密度物体 (核物質) の関係について、状態方程式という観点から焦点を当てていく。

1932年に中性子が発見されると、物理学者ランダウは、中性子で構成された中性子星の存在を予言した。超新星爆発の物理を研究しているうちに、超新星爆発の起きる過程で、中性子星が形成されることを仮定したのである。

超新星爆発とは、星が寿命を向かえたとき急激に爆発を起こす現象で、その光度は銀河全体を照らすほど明るく、数日から一週間程度で光輝くのである。W. Baade と Zwicky は超新星爆発が起きる際に中心部が $3 M_{\odot}$ (太陽質量: $M_{\odot} \sim 1.989 \times 10^{30}$ kg) あると、重力によって束縛されていたエネルギーが放出され、中心部に $2 M_{\odot}$ 程度の中性子星が形成されるということを提案した。現在、知られている典型的な中性子星は $1.35 \sim 2.0 M_{\odot}$ で、半径は $R \sim 12$ km 程度である。

超新星爆発の理論的な計算は Tolman, Oppenheimer と Volkoff によって行われ、1967年に中性子星の連星パルサーが発見された。電波パルサーは非常に早く回転し、その周期は $0.033 \text{ s} \leq P \leq 4.0 \text{ s}$ ほどである。このパルサーは回転によるエネルギー損失によってパルスを放出していると考えられ、その周期は $\dot{P} \sim 10^{-12} - 10^{-16}$ で小さくなっている。また、ミリ秒程度のパルサーの周期は $1.56 \text{ ms} \leq P \leq 100 \text{ ms}$ である。

X線パルサーとバースターは中性子星が大きい質量 ($M \gtrsim 10 M_{\odot}$) から小さい質量 ($M \lesssim 1.2 M_{\odot}$) へと降着を起こすときの現象であると信じられている。非回転、非加速の中性子星の研究もされており、その温度は $T \sim 60$ eV で半径は $R \leq 14$ km である。

マグネターというのは非常に強力な磁場を持った中性子星の一種で、莫大な高いエネルギーを放射する星は X線や γ 線を放射してると考えられている。そのエネルギー放射は、ビームの放射方向が地球を向いているときに観測され、この現象を lighthouse 効果 (灯台

明月記

八日、乙未、霜凝、天晴、北山雪白、客星事、依不審問奏
 俊朝臣、返事如此、曉夕東西之條驚而有餘、客星一昨
 日夜前全現候了、出現以後去二日陰雲不見候、其外者
 天快晴、連日見候、而此兩日者無引連、天曉見良方候、
 曉夕東西出現候之條以外候、
 客星出現例、皇極天皇元年秋七月、甲寅、客星八月、
 陽成院貞觀十九年正月廿五日、丁酉、戌時、客星在辟、
 見西方、宇多天皇寬平三年三月廿九日、己卯、亥時、客
 星在東成星東方、相去一寸所、醍醐天皇延長八年五月
 以後七月以前客星入羽林中、一條院寬弘三年四月二
 日、癸酉、夜以降騎官中有大客星、如熒惑、光明動耀、
 連夜正見南方、或云、騎陣將軍星變本體增光歟、後冷
 泉院天喜二年四月中旬以後丑時、客星出髻參度、見東
 方、孝天關星、大如歲星、二條院永萬二年四月廿二日、
 乙丑、亥時、客星彗見大微宮事、高倉院治承五年六月
 廿五日、庚午、戌時、客星見北方、近王良星守傳舍星、
 午終許心寂房來、事外付滅之由加詞、但惡血之充滿非
 飼蛭時極難治云々、常隨給侍之小婢、依母病危急行南
 京、老病之最中失手臂之便、

寛喜二年 十一月

図1 上記の記録は「明月記」の抜粋であり、藤原定家によって記された日本最古の天体現象の文献である。明月記には1054年に蟹座星雲で超新星爆発があり、同様に1006年に狼座でもあったと記されている。同様の記録は中国の古い文献にも記載されている。国書刊行会、東京(1969)より転写。

効果) と言う。強力な磁場は中性子星の構造と状態方程式に対して、非常に大きな影響を与えていると予想される。磁場の強さ B は以下のように評価される。

$$B \sim 1.4 \times 10^{18} \left(\frac{M}{1.4M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^{-2} \text{ Gauss}, \quad (1)$$

ただし、 M は中性子星の質量、 R は半径である。マグネターの強い磁場が状態方程式に及ぼす影響は、研究されるべき重要な問題の一つである。

現象論的で多義的な状態方程式、ポリトロピック状態方程式 (polytropic equation of state) は、種々の天体現象を考察するのに非常に便利な方程式である。なぜならば、高温では、どのような物質でも理想気体として取り扱う事が可能と期待されるからである。

温度が化学ポテンシャル、もしくは一粒子エネルギーと比較して非常に高い場合、例えば、以下のようなポリトロピックな状態方程式によって巨視的な振る舞いが説明される。

$$p = \rho(1 + Z)k_B T / (A m_p), \quad C_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = \gamma p / \rho, \quad (2)$$

そして

$$\rho \varepsilon = p / (\gamma - 1). \quad (3)$$

ここで ε は一粒子エネルギー (一粒子が持つエネルギー、または、1分子質量あたりの持つエネルギー)、そして k_B はボルツマン定数、 T は温度である。 Z は平均のイオン化の値、 γ は定数としている。 A は分子質量 (一粒子質量を原子質量単位 amu で割ったもの)、そして m_p は陽子の質量 (amu で割ったもの) である。

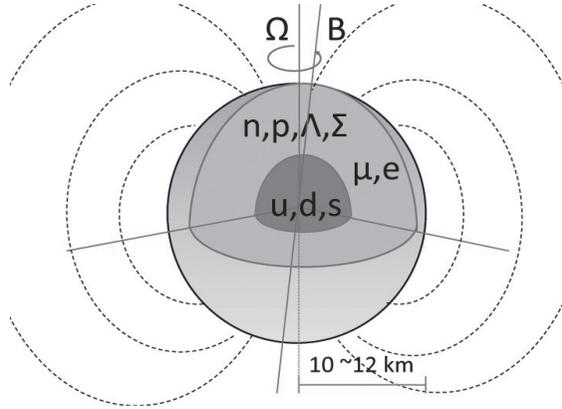


図2 これは磁化を持ち磁場 B と回転軸 Ω を持った双極子中性子星の概略図である。
中性子星はハドロンとクォークの中心核を持っていると予想されている。

黒体放射と放射が重要となっている系の放射気圧は、次の関係式で表される。

$$p_R = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4, \quad (4)$$

ここで T は温度、 c は光速、そして σ は黒体放射において馴染みのあるステファン - ボルツマン定数である。一般的に物質の圧力は、温度 T に比例するが、放射圧力は温度 T の 4 乗に比例するため [24]、高温になると放射圧力が支配的になる。中性子星やブラックホール、超新星爆発の途中で絶対温度のどのような関数になっているのか確かめることは重要である。

中性子星の半径 R と質量 M は重要な巨視的観測量である。例えば、放射半径は

$$R_\infty = R / \sqrt{1 - 2GM/Rc^2}, \quad (5)$$

として、中性子星の表面における熱効果の関係から求められる。また、赤方偏移は以下のように定義される。

$$z = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1. \quad (6)$$

慣性モーメント $I M_\odot \text{km}^2$ 、光源の爆発によるエディントン光度限界、そして、中性子星の重力崩壊によるニュートリノの放出総量は、理論的な計算と状態方程式の無撞着性を確かめるのに用いられる [2]。

中性子星の物理は、原子核物理と天体物理の研究に対して重要な相互作用に関する情報を提供する。中性子星の密度は標準的な核物質の密度 $\rho_0 \sim 0.148 \text{ fm}^{-3}$ よりも非常に高い。それゆえ、状態方程式の決定は中性子星の性質を決める上で非常に本質的であり、非相対論的、相対論的多体効果を持つ近似や様々な有効 QCD モデルが中性子星の状態方程式を構築するのに使用されている。

簡潔に述べると、状態方程式 (EOS) は中性子星の質量、慣性モーメント、質量 - 半径の関係、冷却比、赤方偏移、超新星爆発におけるニュートリノの総放射量などといった性質を決める。しかし、核物質の飽和点密度に比べて密度が小さくなる外殻領域と中性子星の中心部のような高密度領域において、物理的な自由度は異なると考えられるため、ハドロンモデルの描写は適切でないことも推測される。

このような高密度における疑問点をハドロンモデルと QCD モデルの状態方程式を用いた計算により比較することは重要であり、モデルに依存しない予言を検討することは核物理、微視的な動力学の理解にとって本質的である。Brueckner の非相対論的な核子 - 核子ポテンシャルを用いた最低次の計算より、 $3 - 4\rho_0$ の核子密度に至るまで、純粋な中性子核物質と β 平衡系の核物質が本質的に似かよった方程式を出すことが示唆された。対称化エネルギーや陽子主要相の物理的性質などの物理量などにも、同じような定量的な一致が見られた。複雑な 2 体散乱における相互作用を加えたが、これまでの非相対論的多体問題の計算結果から、核物質の飽和点の計算結果が大きく改善されることはないであろうことが示唆される [1]。

しかしながら、相対論的な手法、三体力を加えた相互作用、ハイペロンの生成、パイオンとケイオン凝縮、超流動、ハドロン - クォーク相転移は核密度飽和点以上の密度において状態方程式に大きな補正を加えることが認識されている。理論的整合性のある結果を異なるアプローチより得ることは、一般的に、モデル計算に対して、束縛条件や制限を分析する上で本質的に重要である。理論的計算に対する整合性と束縛条件については、後の章にて詳細に議論、分析していく。

2 相対論的波動関数

この章では、相対論的波動方程式、クライン - ゴルドン (Klein-Gordon) 方程式 (spin-0) とディラック方程式 (spin- $\frac{1}{2}$) を導入して、符号や表記法などを確認する。また、自然単位系、 $\hbar = c = 1$ を用いる。

2.1 クライン - ゴルドン方程式

非相対論的なシュレーディンガー (Schrödinger) 方程式を相対論的に拡張することはエネルギーの関係式 $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ を $E \rightarrow i\partial/\partial t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ を基にして、エネルギーや運動量を演算子として置き換えることにより試みられた。相対論的なエネルギー運動量関係に加えて、相対論的波動方程式の共変性も要求される。

エネルギーと運動量は質量に対する on-shell の条件とローレンツ共変性を満たすように 4 元ベクトル $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を用いて以下のように定義される。

$$p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (7)$$

また、ミンコフスキー空間の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

として与えられる。相対論的なエネルギーと運動量は $E = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ で関係づけられる。この関係は $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ の平方根より定義されるため、明らかに演算子の定義と物理的な解釈に困難を含んでいる。

クライン (Klein) とゴルドン (Gordon) は相対論的量子力学を上記の E と p の関係式を用いることで構築することを試み、以下の相対論的な波動関数を得た。

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\nabla^2 + m^2)\psi. \quad (9)$$

この相対論的波動方程式は、スピン 0 の相対論的な波動関数を表現する、クライン - ゴルドン方程式として知られている。しかしながら、クライン - ゴルドン方程式は非相対論的形式を十分に相対論的形式に拡張したようでありながら、以下の物理的な困難に直面する。

1. 波動関数を以下のエネルギー-運動量の関係より構築すると

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (10)$$

正と負のエネルギー、 $E = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ が表れる。

2. クライン - ゴルドン方程式は時間の 2 階微分、 $\partial^2/\partial t^2$ を含む項を持っているので、連続方程式に $\partial/\partial t$ の項を生じさせる。この結果は、確率密度が正値でなくてはならないという束縛条件に反する結果を生じさせる。

歴史的には、ディラックが波動方程式に線形条件 ($\partial/\partial t$ と ∇ の線形方程式であること) を要請することにより、この問題を解決したのであるが、同時に、真空を、負のエネルギーを持った粒子で満たされていると解釈しなければならなかった。この解釈により、負のエネルギーを持つ粒子が消えてなくなることは、正のエネルギーを持つ反粒子があることと同様となる。電子の反粒子としての陽電子は 1932 年に実際に発見された。理論物理において偉大な業績の一つである。

2.2 ディラックの相対論的場の理論

ディラックは相対論的、ローレンツ不変な方程式を次のように仮定した。

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) &= \left\{ -i\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta m \right\} \psi(\mathbf{x}, t) \\ &= (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{H}\psi(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 a_1, a_2, a_3 、そして β は(11)式を二乗すると、クライン-ゴールドン方程式を導くように決定される。

演算子を二乗すると、

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi &= (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi \\ &= -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi - \sum_{i,j=1}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi - im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi + \beta^2 m^2 \psi. \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。式(12)はクライン-ゴールドン方程式と一致するべきである。

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi + m^2 \psi. \quad (13)$$

式(12)と(13)は、(12)の不要な項を消去するために、以下に述べる反交換関係を満たさなければならないことが分かる。

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j. \quad (15)$$

そして

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1. \quad (16)$$

となる。以上から分かるように α と β は、日常的に使っている交換可能な数ではないことが分かる。その当時、スピン- $\frac{1}{2}$ の非相対論的な粒子は Pauli 行列の性質を持っており、(14)~(16) [6, 7] という反交換関係を満たすことが知られていたので、 α と β はベクトル場 ψ に作用する行列として振る舞うと考えられた。

ディラック方程式はスピン- $\frac{1}{2}$ の粒子を表していて、 α と β の行列の最小単位は 4×4 であることが示される。 α と β の慣例的な選び方は

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

である。ここで 4×4 の行列を 2×2 の対角成分の区画に分け、Pauli 行列 σ_i は通常 2×2 で定義される。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

ただし、1 は 2×2 行列の単位行列である。ディラック・ハミルトニアンは 4×4 の行列式を含んでいるので、波動関数 ψ は四成分を有する列ベクトルとして解釈される。

非相対論的な自由粒子との類似性より、ディラック方程式は一般的なスピン- $\frac{1}{2}$ のスピノール、 $\psi = \omega e^{-ip_\mu x^\mu}$ として分解できる。ここで、 ω は 4 成分のスピノールで $e^{-ip_\mu x^\mu}$ は平面波解である。ディラック方程式の解を、先ほどの解で置換すると

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi, \quad (19)$$

となる。2 × 2 行列の形式を使う手段として、 ω について ϕ と χ の二つの成分に分ける手法が慣例的である。

$$\omega = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (20)$$

そして以下の行列方程式

$$E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{1} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (21)$$

を得る。これは ϕ と χ の結合した方程式の表現である。

$$(E - m)\phi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi, \quad (E + m)\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi. \quad (22)$$

一般的な 4 成分のスピンールは (22) として求められ

$$\omega = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} (E + m)\phi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi \end{pmatrix}, \quad (23)$$

となり、また、 $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2\mathbf{1}$ より ϕ は $(E - m)(E + m)\phi = \mathbf{p}^2\phi$ となる。それ故に、クライン - ゴルドン方程式より得られる $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ と同じ結果を導くことが分かる。

ディラックの波動方程式の確率流の保存則と、ローレンツ共変性については以下に示される。確率密度は $\rho = \psi^\dagger\psi$ で与えられ、以下の様に表現される。

$$\rho = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^4 |\psi_n|^2 > 0. \quad (24)$$

上述の確率密度 ρ の各成分はそれぞれ全て独立で正定値を持つことが明らかである。確率密度の保存則は $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$ という Pauli 行列のエルミート性に注意し、 $\psi^\dagger \times \{i\frac{\partial}{\partial t}\psi - (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi\} - \{i\frac{\partial}{\partial t}\psi - (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)\psi\}^\dagger \times \psi$ を計算することで次のように得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (25)$$

ただし、 $\mathbf{j}(x) = \psi^\dagger(x)\boldsymbol{j}\psi(x) = (\psi^\dagger\alpha_1\psi, \psi^\dagger\alpha_2\psi, \psi^\dagger\alpha_3\psi)$ である。

次にディラック方程式のローレンツ共変性は、 γ 行列の記号を使うことで説明される。 γ 行列は以下の様に定義される。

$$\gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad (26)$$

ただし、 $\gamma^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ は以下の反交換関係を満たす。

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (27)$$

これよりディラック方程式は以下の様に単純化される。

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (28)$$

そして、 4×4 行列 Λ を用いると任意の時空へのローレンツ変換は以下の様に示される。

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (29)$$

ローレンツスカラー場 $\phi(x)$ の変換は以下の様になる。

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x'). \quad (30)$$

これはローレンツスカラー量の要請であり、ブーストを行う前後において場の量が変わらないと言う事を意味している。 $\partial_\mu \phi(x)$ の変換は以下の様に表現される。

$$(\partial_\mu \phi(x)) \rightarrow \partial'_\mu (\phi(\Lambda^{-1}x')) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\partial_\nu \phi)(\Lambda^{-1}x'). \quad (31)$$

ローレンツブーストの 4×4 行列の表現と回転生成子は以下の様になり、

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (32)$$

無限小のローレンツ変換 Λ は次の様に定義される。

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (33)$$

ただし、 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ はローレンツ変換の無限小のスピンールの表現で

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} \equiv \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right), \quad (34)$$

となる。ここで $\omega_{\mu\nu}$ は無限小の角を表す反対称テンソルである。

これでディラック方程式がローレンツ不変であることを示すための用意が出来た。実際に、ディラック方程式のローレンツ変換を行うと以下の様になる。

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) &\rightarrow (i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\nu - m) \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x') \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} (i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\nu - m) \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x') \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} \left(i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{\frac{1}{2}} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\nu - m \right) \Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x') \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} (i\Lambda^\mu{}_\sigma \gamma^\sigma (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m) \psi(\Lambda^{-1}x') \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(\Lambda^{-1}x') = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

以上により、ローレンツ不変であることが分かる [8]。クライン - ゴルドン方程式の困難

にも関わらず、ディラックの方法では、真空が負のエネルギーで満たされているとする解釈を要求したが、特筆すべき物理的な性質を示した。正負のエネルギーに対する物理的な解釈については、後に、粒子 - 反粒子描像が R. P. ファインマンによって提出され、物理的に矛盾がないように議論された。

ファインマンの解釈は、フェルミ粒子とボーズ粒子に矛盾なく適用できて、ディラック方程式とクライン - ゴルドン方程式のファインマン規則に矛盾のないように、負のエネルギーを反粒子として解釈できるという長所を持っている。これより、真空が負のエネルギーによって満たされているという概念を回避することが出来るようになった。

ファインマンの処方箋は以下のようにになっている。

負のエネルギーの解を持つ粒子が時間的に逆向きに伝播するということ ≡
正のエネルギーを持つ反粒子が時間的に正方向に伝播すること。

これにより、相対論的場の理論は基本的、厳密な手法として現代物理学において確立し発展することとなった。

3 一般相対論

この章では、ピアンキの方程式、アインシュタイン方程式、トールマン・オッペンハイマー・ボルコフ方程式 (TOV 方程式) といった白色矮星や中性子星、ブラックホールなどといった星を計算する為の基本的な関係を導出する。

3.1 曲がった空間と平行移動

時空の各点は $t = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3$ 、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、ミンコフスキー空間では式 (8) で与える。最初に、局所的には平らであるようなリーマン空間、曲がっている空間を考える。この空間の任意の点 x^μ と、その近くの不変な長さ ds は以下の様になる。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (36)$$

ただし、 $(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0)$ ならば ds は時空的に正の隔たりで、 $(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0)$ なら時空的に負となる。計量 $g_{\mu\nu}$ は曲がった空間と座標を決定する。

次に、高次元 N 次元空間に埋め込まれている四次元のベクトルの平行移動を決める方程式と、 N 次元の直交座標系 $z^n (N = 1, 2, \dots, N)$ について議論する。距離 ds は以下のように与えられる。

$$ds^2 = h_{nm} dz^n dz^m, \quad (37)$$

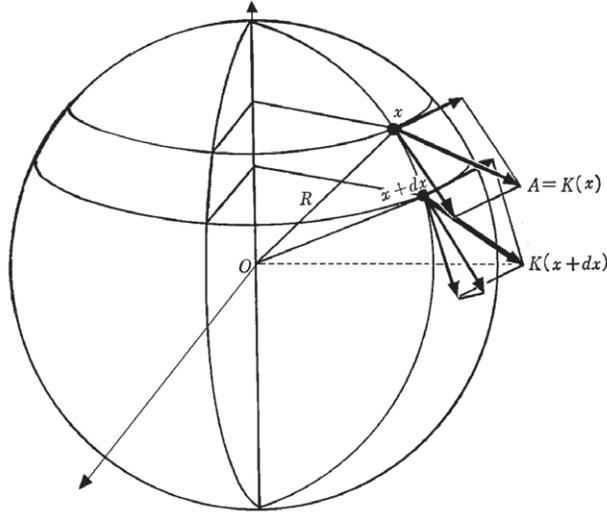


図3 The schematic view of the parallel displacement of a vector on the sphere.

ただし、 n と m は $n, m=1, 2, \dots, N$ まで和を取る。一般的に、計量 h_{nm} は $g_{\mu\nu}$ と異なる定数である。この計量 h_{nm} を用いて、 N 次元空間での添字を下げるのに使う。

$$dz_n = h_{nm} dz^m. \quad (38)$$

この N 次元空間において、4次元空間は局所的には平らな空間として仮定する。物理的空間上にある x^μ によって、 N 次元空間における位置 $y^n(x^\mu)$ は一意に決められるとする。 $y^n(x)$ を x^μ で微分すると

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} = y^n_{,\mu}, \quad (39)$$

を得る。物理的空間における近接した二点の距離 δx^μ は、

$$\delta y^n = y^n_{,\nu} \delta x^\nu, \quad (40)$$

で与えられる。距離の二乗 ds^2 は、式(39)と(40)より、

$$\delta s^2 = h_{nm} \delta y^n \delta y^m = h_{nm} y^n_{,\mu} y^m_{,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu = \delta y^n \delta y^m = h_{nm} y^n_{,\mu} y^m_{,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu \quad (41)$$

となる。ここで $\delta s^2 = g_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu$ となることが分かるから、計量 $g_{\mu\nu}$ は以下の様になる。

$$g_{\mu\nu} = y^n_{,\mu} y_{n,\nu}. \quad (42)$$

ベクトル A^μ の平行移動の際、近接点 $x + dx$ に平行移動した新たな点は同じ物理空間上にはない。よって、ベクトルの平行移動を曲面上に平行移動するように射影する平行移動を考える。射影の方法は、ベクトルを接線方向と法線方向の二つに分解することで考える。

$$A^n = A_{\text{tan}}^n + A_{\text{nor}}^n. \quad (43)$$

法線方向 A_{nor}^n は、平らな空間の無限小の平行移動なので無視される。そして K^μ は、物理的空間面における A^n の x 座標成分と定義すると、

$$A_{\text{tan}}^n = K^\mu y_{,\mu}^n(x + dx), \quad (44)$$

となる。係数 $y_{,\mu}^n$ は新しい点 $x + dx$ において決定されることに注意する。

(43) を $y_{n,\nu}(x + dx)$ に掛けて A_{nor}^n の項を落とすと

$$\begin{aligned} A^n y_{n,\nu}(x + dx) &= K^\mu y_{,\mu}^n(x + dx) y_{n,\nu}(x + dx) \\ &= K^\mu g_{\mu\nu}(x + dx), \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、(42) を用いて上式を得ている。 dx の一次の項までで、 $K_\nu(x + dx)$ は以下の様に書ける。

$$\begin{aligned} K_\nu(x + dx) &= A^n [y_{n,\nu}(x) + y_{n,\nu,\sigma} dx^\sigma] \\ &= A^\mu y_{,\mu}^n [y_{n,\nu} + y_{n,\mu,\sigma} dx^\sigma] \\ &= A_\nu + A^\mu y_{,\mu}^n y_{n,\nu,\sigma} dx^\sigma. \end{aligned} \quad (46)$$

これは A_ν を $x + dx$ に平行移動した結果であり、次の様に定義する。

$$K_\nu - A_\nu = dA_\nu. \quad (47)$$

これより dA_ν は A_ν の平行移動による変量を表す。以上より、ベクトル A_ν の無限小変換は以下の様になることが分かる。

$$dA_\nu = A^\mu y_{,\mu}^n y_{n,\nu,\sigma} dx^\sigma. \quad (48)$$

3.2 クリストッフエル記号

式(42)を微分することにより、

$$g_{\mu\nu,\sigma} = y_{,\mu\sigma}^n y_{n,\nu} + y_{,\mu}^n y_{n,\nu\sigma} = y_{n,\mu\sigma} y_{,\nu}^n + y_{n,\mu} y_{,\nu\sigma}^n, \quad (49)$$

を得る。接尾の添字 n は定数 h_{mn} によって上げ下げが可能であるとしている。ここで、(49) で μ と σ の交換は以下の結果を導く。

$$g_{\sigma\nu,\mu} = y_{n,\sigma\mu} y_{,\nu}^n + y_{n,\nu\mu} y_{,\sigma}^n, \quad (50)$$

さらに、(49) で ν と σ を交換すると

$$g_{\mu\sigma,\nu} = y_{n,\mu\nu} y_{,\sigma}^n + y_{n,\sigma\nu} y_{,\mu}^n, \quad (51)$$

を得る。そして、(49)+(51)-(50)をして2で割ると以下の結果が得られる。

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}) = y_{n,\nu\sigma} y_{,\mu}^n, \quad (52)$$

左辺は以下のように定義されて、

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}), \quad (53)$$

第1種クリストッフエル記号と呼ばれる。これは最後の二つの添字に関して対称であり、擬テンソル (nontensor) である。

(53)式の自明な結果は

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma}, \quad (54)$$

であり、(48)式は、以下の様書き下せる。

$$dA_\nu = A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma} dx^\sigma. \quad (55)$$

この関係式は、次のようにクリストッフエル記号の最初の添字を上げ下げするのに有用であり、

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = g^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\sigma}, \quad (56)$$

第二種クリストッフエル記号と呼ばれる。第二種クリストッフエル記号は、二つの下付きの添字の交換について対称であり、(55)式は次の様にも表すことができる。

$$dA_\nu = \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A_\mu dx^\sigma, \quad (57)$$

この式は、反変ベクトルの成分を用いて、無限小変換を共変ベクトルで表現したときの形式である。

反変ベクトルの成分に対する変換式を得るために、平行移動においてはベクトルの長さは一定であるという事実を使う。あるベクトル A 、 B において、スカラー積 $A_\mu B^\mu$ が定数であることは $d(A_\nu B^\nu) = 0$ を意味するが、その関係を利用すると

$$A_\nu dB^\nu = -B^\nu dA_\nu = -B^\nu \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A_\mu dx^\sigma = -B^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\nu A_\nu dx^\sigma, \quad (58)$$

が分かる。これはどの A_ν でも恒等的に成立するから

$$dB^\nu = -\Gamma_{\mu\sigma}^\nu B^\mu dx^\sigma, \quad (59)$$

を得る。これが平行移動における反変ベクトルの成分に対する標準的な形式である。

3.3 共変微分

ベクトル変換法則 $A_{\mu'} = A_{\rho}x^{\rho}_{,\mu'}$ の直接微分により、

$$A_{\mu',\nu'} = (A_{\rho}x^{\rho}_{,\mu'})_{,\nu'} = A_{\rho,\sigma}x^{\sigma}_{,\nu'}x^{\rho}_{,\mu'} + A_{\rho}x^{\rho}_{,\nu'\mu'}, \quad (60)$$

を得るが、これは擬テンソルであり、共変テンソルを得るために微分を修正する。

ここで、点 x のベクトル A_{μ} を $x + dx$ に平行移動することを考える。一次までの計算では

$$A_{\mu}(x + dx) - [A_{\mu}(x) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha}dx^{\nu}] = (A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha})dx^{\nu}. \quad (61)$$

この量は、任意のベクトル dx^{ν} で成立し、それ故、係数 $A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha}$ はテンソルである。これは、ベクトル A_{μ} の共変微分を定義する。

$$A_{\mu:\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha}. \quad (62)$$

コロンで表されている下付きの添字は共変微分を定義して、コンマは従来の微分を定義する。

テンソルの共変微分は $A_{\mu}B_{\nu}$ の外積を直接に共変微分すると、

$$(A_{\mu}B_{\nu})_{,\sigma} = A_{\mu;\sigma}B_{\nu} + A_{\mu}B_{\nu;\sigma}, \quad (63)$$

を用いて、以下の様に表される。

$$\begin{aligned} (A_{\mu}B_{\nu})_{,\sigma} &= (A_{\mu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}A_{\alpha})B_{\nu} + A_{\mu}(B_{\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}B_{\alpha}) \\ &= (A_{\mu}B_{\nu})_{,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}A_{\alpha}B_{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}A_{\mu}B_{\alpha}. \end{aligned} \quad (64)$$

これにより、テンソルの共変微分を定義する。

$$T_{\mu\nu;\sigma} = T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}T_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}T_{\mu\alpha}. \quad (65)$$

この法則はテンソル $Y_{\nu\mu\dots}$ の添字に関する共変微分にも拡大され、

$$Y_{\mu\nu\dots;\sigma} = Y_{\mu\nu\dots,\sigma} - (\text{a } \Gamma \text{ term for each suffix}), \quad (66)$$

のようになる。スカラーの場合、一般的な形式(66)は

$$Y_{;\sigma} = Y_{,\sigma}, \quad (67)$$

となる。そして、共変微分を $g_{\mu\nu}$ に適用すると、

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}g_{\mu\alpha} \\ &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

となり、 $g_{\mu\nu}$ は共変微分において定数である事が分かる。共変微分は、二つのベクトルのスカラー積を微分したものにも成り立つと仮定する。それは、

$$(A^\mu B_\mu)_{;\sigma} = A^\mu_{;\sigma} B_\mu + A^\mu B_{\mu;\sigma}, \quad (69)$$

となり、(62)と(67)式に従うと、

$$(A^\mu B_\mu)_{;\sigma} = A^\mu_{;\sigma} B_\mu + A^\mu (B_{\mu;\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha B_\alpha), \quad (70)$$

を得る。そして、

$$A^\mu_{;\sigma} B_\mu = A^\mu_{;\sigma} B_\mu - A^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu B_\mu, \quad (71)$$

となる。上式は、任意の B_μ に対して成立して次の様になる。

$$A^\mu_{;\sigma} = A^\mu_{,\sigma} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu A^\alpha. \quad (72)$$

これは、反変ベクトルの共変微分に対する基本的な式である。

3.4 曲率テンソル

ここでは、スカラー場 S とベクトル場 A_ν に続けて共変微分を行った場合を考える。(62)の公式より、

$$S_{;\mu;\nu} = S_{;\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S_{;\alpha} = S_{;\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S_{,\alpha}, \quad (73)$$

となることが示される。これは μ と ν の入れ替えに関して対称である。(62)と(65)の形式より $A_{\nu;\rho}$ と $T_{\mu\nu}$ の2階共変微分は以下の様になる。

$$\begin{aligned} A_{\nu;\rho;\sigma} &= A_{\nu;\rho,\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha A_{\alpha;\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha A_{\nu;\alpha} \\ &= (A_{\nu,\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha A_\alpha)_{;\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha (A_{\alpha,\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^\beta A_\beta) - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha (A_{\nu,\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta A_\beta) \\ &= A_{\nu,\rho,\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha A_{\alpha,\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha A_{\alpha,\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha A_{\nu,\alpha} - A_\beta (\Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\beta - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta) \end{aligned} \quad (74)$$

(74)において、 ρ と σ の共変微分を交換して引き算を行うと

$$A_{\nu;\rho;\sigma} - A_{\nu;\sigma;\rho} = A_\beta R_{\nu\rho\sigma}^\beta, \quad (75)$$

となり、テンソル $R_{\nu\rho\sigma}^\beta$ を以下の様に定義する。

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = \Gamma_{\nu\sigma,\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\beta + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta, \quad (76)$$

この関係式は、曲率テンソルのリーマン-リストッフエル記号と呼ばれる。リーマン-クリストッフエルテンソルは添え字に関して、いくつかの性質をもつ。

$$R_{\nu\rho\sigma}^\beta = -R_{\nu\sigma\rho}^\beta, \quad (77)$$

そして

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} + R_{\rho\sigma\nu}^{\beta} + R_{\sigma\nu\rho}^{\beta} = 0. \quad (78)$$

式(56)より、 $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ の上付きの添字 μ は下付きの添字に変更できることが分かる。

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = g_{\mu\beta}\Gamma_{\nu\sigma,\beta}^{\beta} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha\rho} - \langle \rho\sigma \rangle, \quad (79)$$

ただし、 $\langle \rho\sigma \rangle$ はその直前の項に対して、 ρ と σ の交換項を表している。以上より、

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\sigma\rho} &= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - g_{\mu\beta,\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} - \langle \rho\sigma \rangle \\ &= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - \Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} - \langle \rho\sigma \rangle \\ &= \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}) + \Gamma_{\beta\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\beta} - \Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}, \end{aligned} \quad (80)$$

が得られる。これに、つぎの対称性と

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad (81)$$

そして、

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (82)$$

が加えられる。これらの対称性による関係式は、 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の256個の成分が20個の独立な要素から成っている事を示している。

3.5 ビアンキ方程式、The Bianchi equation

テンソルの二次共変微分は、時空の幾何学において基本的に重要なビアンキ方程式 (Bianchi equation) を生成する。2つのベクトルの外積 $A_{\mu}B_{\tau}$ の共変微分は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} (A_{\mu}B_{\tau})_{:\rho;\sigma} &= (A_{\mu;\rho}B_{\tau} + A_{\mu}B_{\tau;\rho})_{:\sigma} \\ &= A_{\mu;\rho;\sigma}B_{\tau} + A_{\mu;\rho}B_{\tau;\sigma} + A_{\mu;\sigma}B_{\tau;\rho} + A_{\mu}B_{\tau;\rho;\sigma}. \end{aligned} \quad (83)$$

(83)での ρ と σ の交換差し引きしたものに(74)を用いると、

$$(A_{\mu}B_{\tau})_{:\rho;\sigma} - (A_{\mu}B_{\tau})_{:\sigma;\rho} = A_{\alpha}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha}B_{\tau} + A_{\mu}R_{\tau\rho\sigma}^{\alpha}B_{\alpha}. \quad (84)$$

一般テンソルの $T_{\mu\tau}$ は、 $A_{\mu}B_{\tau}$ の和の項のように表され、以下の関係を満たす。

$$T_{\mu\tau;\rho;\sigma} - T_{\mu\tau;\sigma;\rho} = T_{\alpha\tau}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} + T_{\mu\alpha}R_{\tau\rho\sigma}^{\alpha}. \quad (85)$$

$T_{\mu\tau}$ の共変微分のように $A_{\mu;\tau}$ を考えると

$$A_{\mu;\tau;\rho;\sigma} - A_{\mu;\tau;\sigma;\rho} = A_{\alpha;\tau}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} + A_{\mu;\alpha}R_{\tau\rho\sigma}^{\alpha}, \quad (86)$$

を得ることが分かる。 τ, ρ, σ についてサイクリックに変化させたものを加えると、

$$\begin{aligned} A_{\mu;\rho;\sigma;\rho} - A_{\mu;\sigma;\rho;\tau} + (\text{cyc perm}) &= (A_{\alpha}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha})_{:\tau} + (\text{cyc perm}) \\ &= A_{\alpha;t}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} + A_{\alpha}R_{\mu\rho\sigma;\tau}^{\alpha} + (\text{cyc perm}) \end{aligned} \quad (87)$$

となる。右辺にある $A_{\alpha;\tau}R_{\mu\rho\sigma;\tau}^{\alpha} + (\text{cyc perm})$ の項は(78)より打ち消し合い、下記のように式が残る。

$$A_{\alpha;\tau}R_{\mu\rho\sigma;\tau}^{\alpha} + (\text{cyc perm}) = 0. \quad (88)$$

ここで $A_{\alpha;\tau}$ の項は、各項に共通因子として表われるので、

$$R_{\mu\rho\sigma;\tau}^{\alpha} + R_{\mu\sigma\tau;\rho}^{\alpha} + R_{\mu\tau\rho;\sigma}^{\alpha} = 0, \quad (89)$$

を得る。この共変微分方程式は3.4の曲率テンソルの満たすべき方程式であり、対称性を全て満たしている。この関係式は Bianchi equation として知られており時空幾何学を決定する重要な関係式である。

3.6 Ricci tensor、リッチテンソル

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$ の2つの添字を縮約する (contraction) と、

$$R_{\nu\rho\mu}^{\mu} = R_{\nu\rho}, \quad (90)$$

を得る。これを Ricci tensor という。(82)に $g^{\mu\rho}$ を掛けることにより、

$$R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}, \quad (91)$$

を得る。これは、Ricci tensor が対称テンソルであることを示している。Ricci tensor は、さらに、次の様に縮約される。

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R_{\nu}^{\nu} = R. \quad (92)$$

この R はスカラー量でスカラー曲率もしくは、全曲率と呼ばれている。そして、三次元空間の表面では正となるよう定義されている。

次に、ビアンキの方程式(89)を二回縮約し $\tau = \alpha$ として、 $g^{\mu\rho}$ を掛けてみると、

$$g^{\mu\rho}(R_{\mu\rho\sigma;\alpha}^{\alpha} + R_{\mu\sigma\alpha;\rho}^{\alpha} + R_{\mu\alpha\rho;\sigma}^{\alpha}) = 0, \quad (93)$$

となり、そして

$$(g^{\mu\rho}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha})_{:\alpha} + (g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma\alpha}^{\alpha})_{:\rho} + (g^{\mu\rho}R_{\mu\alpha\rho}^{\alpha})_{:\sigma} = 0, \quad (94)$$

が得られることが分かる。何故なら

$$g^{\mu\rho}R_{\mu\rho\sigma}^{\alpha} = g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho\rho}g^{\alpha\beta}R_{\mu\beta\sigma\rho} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\sigma} = R_{\sigma}^{\alpha}, \quad (95)$$

なので、式(94)は

$$R_{\sigma:\alpha}^{\alpha} + (g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma})_{;\rho} - R_{;\sigma} = 0, \quad (96)$$

となる。式(91)と(77)を使うと、

$$2R_{\sigma:\alpha}^{\alpha} - R_{;\sigma} = 0, \quad (97)$$

が得られるが、これは Ricci tensor に対するビアンキの関係式である。添字 σ を上げることにより

$$(R^{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}R)_{;\alpha} = 0, \quad (98)$$

が得られる。そして、(76)から、Ricci tensor の表現が

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}, \quad (99)$$

として得られる。右辺第1項 $\Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha}$ 以外の3項は明らかに対称的である。また、最初の項も対称的であるが、それは次のようにして示される。

g を微分し、 $gg^{\lambda\mu}$ ($g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = g_{\alpha}^{\mu}$) を掛けることにより、 $g_{,\nu} = gg^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}$ を得る。そして、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^{\mu} &= g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}g^{-1}g_{,\nu} = (\log g)_{,\nu}, \end{aligned} \quad (100)$$

を得る。この最初の項もまた(99)に於いて対称的である。

3.7 アインシュタイン方程式とシュワルツシルト半径

アインシュタインによって仮定された重力の法則では、物質や物理場の存在しない空の、または平らな空間においては、Ricci tensor により

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (101)$$

が成立するとして、重力のみで構成されるとした。重力場の存在は、平らな空間と時空の幾何学を阻害せず、他の場は空間の幾何学に影響を与えると仮定した。平らな空間では測地線は直線であり、粒子は直線運動をする。平らではない空間では、アインシュタインの法則(101)が空間の曲率に制限を加える。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ をポテンシャルとしてみなすと、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ (101) によって決定される。Ricci tensor 方程式は、二次微分方程式であるという点において物理学の方程式と類似していると言える。何故なら、クリストッフェル記号は一次の微分を含んでいるか

ら、二次微分が(99)に現れるのである。

それらの方程式は非線形の場合の方程式であり、時空の幾何学は場と物質によって非常に複雑に決定され、正確な解を得るのが困難となっている。しかし、ある一つの特別な近似において解を得ることが出来ることが知られている。それは、定常で、かつ球対称であり静止系の場合である。

定常状態とは $g_{\mu\nu}$ の各成分が時間 t と独立であり、かつ $g_{0m} = 0$ であることを意味している。空間座標は、極座標系 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ で表わされ、球対称性を持つ最も一般的な ds^2 は

$$ds^2 = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (102)$$

で与えられる。ここで、 U, V と W は r の関数であり、球対称性という性質を可能な限り利用している。最も便利な方法は $W = 1$ として、 ds^2 を以下のようにとることである。

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (103)$$

ただし、 ν と λ は r の関数である。

計量 $g_{\mu\nu}$ の成分は、アインシュタインの関係式(101)を満たすように構成されている。式(103)から、 $g_{\mu\nu}$ の成分について以下のように表示することができる。

$$g_{00} = e^{2\nu}, \quad g_{11} = -e^{2\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (104)$$

そして、 $\mu \neq \nu$ の場合、 $g_{\mu\nu} = 0$ である。

ここで、共変な $g_{\mu\nu}$ は、 $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$ より

$$g^{00} = e^{-2\nu}, \quad g^{11} = -e^{-2\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad (105)$$

となり、 $\mu \neq \nu$ は $g^{\mu\nu} = 0$ となる。以上より、クリストッフエル記号 $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ を計算することができる。ほとんどの項は消えるが、消えない項に関して r の微分をプライム'で表わすと

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \nu' e^{2\nu-2\lambda}, & \Gamma_{10}^0 &= \nu', \\ \Gamma_{11}^1 &= \lambda', & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = r^{-1}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (106)$$

を得る。これらの結果を、Ricci tensor(99)に代入すればよい。結果として、 $\lambda(r)$ と $\nu(r)$ に関する非線形の微分方程式、

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2\nu-2\lambda}, & R_{11} &= \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1, & R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (107)$$

を得る。その他の $R_{\mu\nu}$ の項は、アインシュタインの重力の法則(101)により消える。 $R_{00} = 0$ と $R_{11} = 0$ は、 $\lambda' + \nu' = 0$ を導く。

場と物質を含む球対称な空間では、 r が非常に大きい場合 $r \rightarrow \infty$ において近似的に平らな空間となるので、 λ と ν は消えなくてはならない。この条件は、 $\lambda + \nu = 0$ を導く。 R_{22} は $(1 + 2rv')e^{2\nu} = 1$ 、または $(re^{2\nu})' = 1$ となり、結果として $re^{2\nu} = r - 2m$ になる。 $-2m$ は定数であり、ニュートン近似において ($\hbar = c = G = 1$) とした時の値と整合性があるように合わせている。ここで、ニュートン近似の極限においての流体方程式の圧力と重力の釣り合い条件から、この定数は $-2Gm$ と選ばれるべきであることに注意しておく [4, 5]。以上より、

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} . \quad (108)$$

を得る。

式(107)に現れる積分定数である m は、重力場を生成する物体の質量と解釈される。完全解は、

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (109)$$

となり、この解は **Schwarzschild 解** として知られている。Schwarzschild 解は物質はない球の外側でも成立する。

物質がない場合、アインシュタイン方程式(101)において、

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0, \quad (110)$$

となり、または、 $g^{\mu\nu} \times (101)$ として縮約して $R = 0$ となる。

物質が存在する場合は、以下のように修正される。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = Y^{\mu\nu}, \quad (111)$$

ただし、 $Y^{\mu\nu}$ は物質の存在から示される対称な二階テンソルである。

ビアンキの関係式(98)は、 $Y^{\mu\nu}$ の共変微分に対して、

$$Y^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (112)$$

という条件を要求する。任意の $Y^{\mu\nu}$ による物質の寄与は、一般相対性理論と整合性があるように構成されるならば、上式を満たさなければならない。

例えば、 $Y^{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルが考えられ、 $Y^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$ となる (k は定数)。テンソルの係数 k は伝統的には -8π を取り、(111)は以下のように書かれる。

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi T^{\mu\nu}. \quad (113)$$

係数と共に書かれた、右辺のテンソル $T^{\mu\nu}$ を、エネルギー・運動量密度として解釈する。

平らな空間において、方程式(112)は

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (114)$$

となり、物理的には、エネルギー保存則、運動量保存則と整合性があることになる。曲がった空間においては、エネルギーと運動量保存則は近似的に成り立つとみなされる。誤差は物質に働く重力場に原因がある。なぜならば、重力場によってエネルギーと運動量が外に運び出されると考えられるためである。

3.8 Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式

恒星の外側の領域では、Ricci tensor は0であると仮定できるが、恒星の内部ではそのようにできない。恒星の内部では、物質が存在する中でのアインシュタイン方程式(111)を用いなければならない。(105)と(107)から、スカラー量である曲率は、

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = e^{-2\nu}R_{00} - e^{-2\lambda}R_{11} - \frac{2}{r^2}R_{22} \\ &= e^{-\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}, \end{aligned} \quad (115)$$

となる。 $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = g_{\mu}^{\sigma}$ の関係がアインシュタイン方程式の計算を簡単化するので、テンソルを利用して計算すると便利である。アインシュタイン方程式の各成分は、(111)式より、

$$\begin{aligned} r^2 Y_0^0 &= e^{-2\lambda}(1 - 2r\lambda') - 1 = -\frac{d}{dr}\{r(1 - e^{-2\lambda})\}, \\ r^2 Y_1^1 &= e^{-2\lambda}(1 + 2r\nu') - 1, \\ Y_2^2 &= (\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}), \quad Y_3^3 = Y_2^2, \end{aligned} \quad (116)$$

となる。定義している計量によるエネルギー・運動量テンソルは ($Y^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$) は、

$$T_0^0 = \mathcal{E}, \quad T_i^i = -p \quad (\text{注、 } i \text{ は和を意味しない}), \quad (117)$$

となり、この成分 $r^2 Y_0^0$ を積分系に書くと、

$$r^2 Y_0^0 = -\frac{d}{dr}\{r(1 - e^{-2\lambda})\} = kr^2 T_0^0 = kr^2 \mathcal{E}(r), \quad (118)$$

を得る。直接に積分できて、

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 + \frac{k}{r} \int_0^r x^2 dx \mathcal{E}(x), \quad (119)$$

となる。この式を物理的な観点から、次のように定義する。

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r x^2 dx \mathcal{E}(x), \quad (120)$$

この式は質量 m 、半径 r の球形の星を表わしている。大文字 R で星の最大半径を表わすことにする。星の表面では重力に逆らって物質を支える必要はないので、圧力の式 $p(R) = 0$ で星の表面と星の半径が定義される。また、アインシュタイン方程式の定数は、 $k = -8\pi$ 、または $k = -8\pi G$ と定義する。

以上の準備により、球対称で定常な星の構造についての相対論的方程式を書き下すことができる。Schwarzschild の解は次のようになる。

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (121)$$

$$r^2 T_1^1 = e^{-2\lambda} (1 + 2r\nu') - 1 = 8\pi r^2 p(r). \quad (122)$$

便宜上、変数 r による微分をプライム、'、で表わす。式(121)と(122)を r で微分すると、

$$\lambda' = (4\pi\mathcal{E}(r) - M(r)) \frac{e^{2\lambda}}{r^2}, \quad \nu' = (4\pi r^3 p(r) + M(r)) \frac{e^{2\lambda}}{r^2} \quad (123)$$

の関係式を得る。他の関係式は以下のようになる。

$$\nu'^2 = (4\pi r^3 p(r) + M(r))^2 \frac{e^{4\lambda}}{r^4}, \quad (124)$$

$$\lambda'\nu' = (4\pi r^3 p(r) + M(r))(4\pi r^3 \mathcal{E}(r) - M(r)) \frac{e^{4\lambda}}{r^4}, \quad (125)$$

$$\frac{\nu' - \lambda'}{r} = \{4\pi r^3 (p(r) - \mathcal{E}(r)) + 2M(r)\} \frac{e^{2\lambda}}{r^3}, \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \nu'' &= (4\pi r^3 p(r) + M(r)) (4\pi r^3 \mathcal{E}(r) - M(r)) \frac{2e^{4\lambda}}{r^4} \\ &+ \{4\pi r^5 p'(r) + 4\pi r^4 (p(r) + \mathcal{E}(r)) - 2rM(r)\} \frac{e^{2\lambda}}{r^4}, \end{aligned} \quad (127)$$

式(116)から次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} T_2^2 &= e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \\ &= e^{-2\lambda} \frac{e^{4\lambda}}{r^4} \left[(4\pi r^3 p(r) + M(r)) \{4\pi r^3 p(r) + M(r) + 8\pi r^3 \mathcal{E} - 2M(r)\} \right. \\ &\quad \left. - (4\pi r^3 p(r) + M(r)) (4\pi r^3 \mathcal{E}(r) - M(r)) \right] \\ &\quad + e^{-2\lambda} \frac{e^{2\lambda}}{r^4} \{4\pi r^5 p'(r) + 4\pi r^4 (p(r) + \mathcal{E}(r)) - 2rM(r) + 4\pi r^4 (p(r) - \mathcal{E}(r)) + 2rM(r)\} \\ &= \frac{e^{2\lambda}}{r^4} (4\pi r^3 p(r) + M(r)) \{4\pi r^3 (p(r) - \mathcal{E}(r)) + 8\pi r^3 \mathcal{E}(r)\} + 4\pi (rp'(r) + 2p(r)) \\ &\equiv 8\pi p(r). \end{aligned} \quad (128)$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned} p'(r) &= -\frac{e^{2\lambda}}{r^2} (4\pi r^3 p(r) + M(r)) (p(r) + \mathcal{E}(r)) \\ &= -\frac{(4\pi r^3 p(r) + M(r)) (p(r) + \mathcal{E}(r))}{r^2 \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)}, \end{aligned} \quad (129)$$

を得る。これが、アインシュタイン方程式から導かれる、球対称な星の状態を決定する Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) 方程式である。

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G [p(r) + \mathcal{E}(r)] [M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r [r - 2GM(r)]}, \quad (130)$$

ただし、 G は重力定数であり、次元の確認のため挿入している。

4 原子核多体問題の基礎と歴史

4.1 ワイツゼッカー (Weizsäcker) 質量公式

これまで、巨視的世界の時空と物質について議論してきた。このセクションから、微視的世界の動力学と核物質の性質について、本質的に重要な点を簡潔に説明する。

安定な原子核の半径は、原子核の質量数 $A=Z+N$ に比例している。 Z と N は、それぞれ陽子数、中性子数を表わす。原子核の半径は、

$$R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \sim 1.2 \text{ fm} \quad (1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}), \quad (131)$$

と表わされる。原子核の束縛エネルギーは、実験的に次の式で理解できる： $B(Z, N) = -\{ZM_p + NM_n - M(Z, N)\}c^2$ 、ただし、 $M(Z, N)$ は原子核の全質量で、陽子の質量はエネルギー単位で、 $M_p = 938 \text{ MeV}$ 、中性子の質量は $M_n = 939.6 \text{ MeV}$ である。

しかしながら、束縛エネルギーは、次の現象論的な質量公式で良く理解される：

$$B(Z, N) = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 Z^2 A^{-1/3} + a_4 \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A), \quad (132)$$

この関係式は、一様に帯電した原子質量 A 、電荷 eZ の非圧縮性、液滴モデルの概念を基礎にして作られていて、半経験的なワイツゼッカー (Weizsäcker) の質量公式という。この質量公式は原子周期律表の原子核の束縛エネルギーを良く表現できる。

式(132)の第1項は、原子核体積に依存するエネルギーで、核物質の飽和点密度における束縛エネルギーに対応する。(フェルミ運動量 $k_F = 1.30 \text{ fm}^{-1}$ において、束縛エネルギー、 $|a_1| = |B/A - M| \sim 15.75 \text{ MeV}$ である)。

第2項は、有限な原子核の表面張力に由来するエネルギーで、第3項は電荷を持つ陽子

同士に働くクーロン力を表わす。第4項は、原子核の陽子、中性子の対称性を保存しようとする傾向を示すエネルギーで、対称化エネルギー (symmetry energy) を表わす。第5項は、束縛エネルギーが陽子数 Z 、中性子数 N の偶数、または奇数対生成に依存していることから由来する対生成エネルギー (pairing energy) を表わす。

以上の数値の実験値は、

$$\begin{aligned} a_1 &= 15.75 \text{ MeV}, & a_2 &= 17.2 \text{ MeV} \\ a_3 &= 0.06 \text{ MeV}, & a_4 &= 30.0 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (133)$$

となっている。対生成エネルギーは、

$$\delta(A) = \begin{cases} \frac{12}{\sqrt{A}} \text{ MeV}, & (Z = \text{odd number}, N = \text{odd number}) \\ 0, & (A = Z + N = \text{odd}) \\ -\frac{12}{\sqrt{A}} \text{ MeV}, & (Z = \text{even}, N = \text{even}) \end{cases} \quad (134)$$

と与えられる。これらの値は原子核物理学の理論にとって基本的に重要である [14]。

4.2 束縛エネルギーの問題

束縛エネルギーは原子核のハドロン相互作用の結果であり、その実験値(133)は、原子核モデルの理論的結果を分析するために本質的に重要である。原子核の理論的モデルは、ハドロン (中間子、核子) やクォーク、グルーオンなどの自由度を用いて議論される。しかしながら、原子核モデルが束縛エネルギーの実験値(133)を実験値の誤差の範囲内に於いて表現することができなければ、そのモデルは原子核のモデルとして成立せず捨てられることになる。

良く知られた重要な問題として、核物質の束縛エネルギー $a_1 = 15.75 \text{ MeV}$ に関する長方形領域の問題がある。ところで、クーロン力が無視できて、核子数が中性子星を形成する程に非常に多く、核子が対称的 $N=Z$ ならば、ワイツゼッカーの質量公式(132)は核子数 A に比例する項だけが重要な項として残ることが分かる。

このような核子が対称的 $N=Z$ である仮想的な無限物質系を、核物質という。核物質の束縛エネルギー (binding energy) の計算は、明らかに a_1 を理論的に求めることである。他の物理的な値 a_2 と a_3 は無視できる。

結論として、核物質はエネルギー最小値 (核物質の飽和点) を持つ物質となる。その実験値は、束縛エネルギーに対して、 -15MeV から -17MeV の値であり、密度はフェルミ波数 k_F を使って表わすと、 $1.29 \sim 1.44 \text{ fm}^{-1}$ の範囲となっている。原子核の相互作用ポテンシャルを理論モデルに応用して計算した結果は、上述の実験値を説明できる範囲にならない。

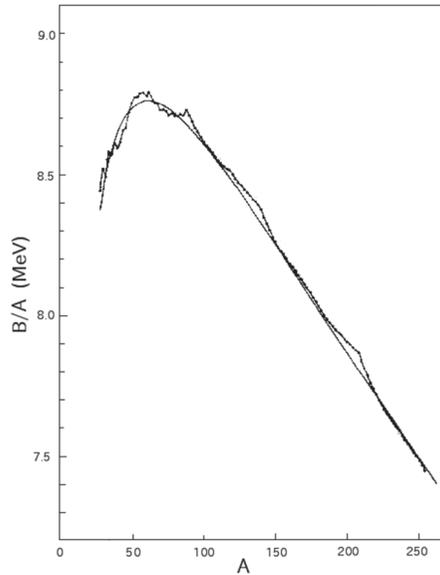


図4 ワイツゼッカー (Weizsäcker) の質量公式と束縛エネルギーの実験値についての概略図。点線は束縛エネルギーの実験値である [A. Bohr and B. R. Mottelson, 1969]。滑らかな曲線は、ワイツゼッカー (Weizsäcker) の質量公式(132)を表わす。

B. D. Day は、核子-核子散乱実験と重水素のデータと一致するように得られた、いくつかの代表的な原子核ポテンシャルを用いて、核物質の飽和点エネルギーと密度を分析した [10]。核子は、2体問題ポテンシャルを持つハミルトニアンによって表現される、非相対論的シュレーディンガー方程式に従うとしている。

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i<j}^A V_{ij}, \quad (135)$$

ただし、 A は原子核の質量数を表わす。

核物質の飽和点は、フェルミ液体モデルとハートリー・フォック近似を用いて有限核のデータを生成するように適合させ、ワイツゼッカーの質量公式を用いて核物質の物理量を求めている。計算結果は、図5に示されている。図に示された結果から分かるように、いくつかの相互作用ポテンシャルから導かれる核物質の飽和点の値が、長方形で示された実験値から外れたある範囲に収束していることが分かる。

2体相互作用ポテンシャルをもつブルックナー・ベータ (Brueckner-Bethe) 計算の努力にもかかわらず、図5の飽和点の問題を解決することは困難である [10]。相対論的效果、核子3体力の効果、多体問題の効果などが、この根本的問題を解決する糸口であろうと考えられる。

原子核相互作用ポテンシャルに要求される根本的問題は、核物質の飽和点の実験値を正

確に導出することである。そのような相互作用ポテンシャルにより計算が精密に実行されたとき、原子核の実験値と理論の整合性が分析できることになる。束縛エネルギーについての理論的、実験的事実は、原子核物理学の理論にとって重要な判定基準となるのである。

加えて、核物質の飽和点においては、圧力は0となるが、この事実は、動力学的に重要な物理的意味を持ち、Hugenholtz-Van Hove の定理として知られている重要な定理を導く。この定理については、次のセクションで詳しく論ずる。

束縛エネルギーの問題 (rectangle problem) と Hugenholtz-Van Hove 定理は、原子核理論の自己無撞着性の問題を通して根本的に関係している。ハドロンの任意の理論は、量子色力学の有効理論や、格子 QCD 理論などがあるが、これまで説明してきた基礎的な条件を満足できるかは、それらの理論が有効かどうかの重要な問題となるのである。

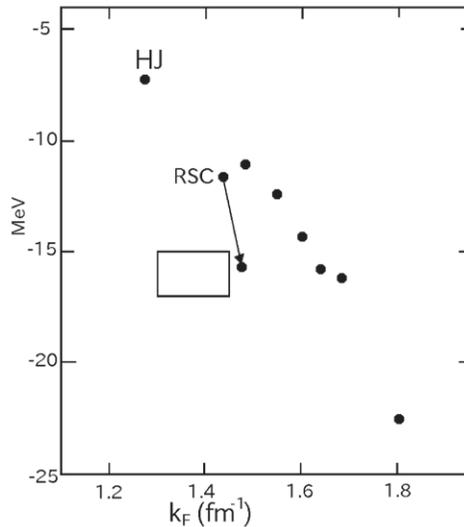


図5 2体相互作用ポテンシャルに、2-hole line の寄与を入れた Brueckner-Bethe 法による飽和点計算の概略図。矢印は Reid ポテンシャルに 3-hole line の寄与を入れて計算したときの結果である。核飽和点の実験値は長方形で示した範囲にある [10]。その他の計算は RSC:Reid potential, HJ: Hamada, Johnston potential などの結果である。

5 核物質の飽和点と Hugenholtz-Van Hove の定理

強い相互作用をしている核子に働く力を明らかにすることは、実は非常に困難な問題である。なぜならば、核子間の強い相互作用による非摂動的な斥力が、有限な原子核系の計算を非常に困難なものにしているからである。陽子と中性子の割合が決まっている無限核物質系では、それでも多くの理論的な単純化は可能である。

十分に高密度で中間子などの揺らぎが無視できる場合は、量子的な中間子場は平均場として古典的な場で置き換えても良いであろう。このような平均場理論は良く知られた理論

的アプローチの1つである [11]。

J. D. Walecka は、このような条件を原子核多体系の核物質の密度の範囲に於いても成立することを仮定して理論的に整合性のある理論を展開した。それが、相対論的で繰りこみ可能な量子場の理論であり、量子ハドロン力学 (Quantum hadrodynamics: QHD) として知られている。

量子ハドロン力学 (QHD) は応用と計算に多くの結果を示してきたが、同時に理論的に不十分な点も明らかにしている。そのような理論的性質が自身の発展と進展につながっている [12]。

量子ハドロン力学は、対称核物質の多体問題に応用されてきている。対称核物質の束縛エネルギーは、図6にあるように最小値を持つ自己束縛系であり、最小値が核物質の飽和点である。核物質の飽和点は核子の相互作用で生ずる斥力と引力のバランスにより生ずるもので、従って圧力 $p=0$ となる。

核物質の自己束縛系という性質は原子核多体系の強い相互作用の結果であり、核子のエネルギーに関する重要な定理、Hugenholtz-Va Hove (HV) 定理を導くことになる。この定理は近似の理論的整合性、自己無撞着性を判定するために重要である。その理論的内容は、1核子のフェルミエネルギーと核物質飽和点における1核子の平均エネルギーは等しいというものである。

核子の1粒子エネルギーが、粒子、またはホール粒子の平均場中での動力的運動を通して理論的に構築されているならば、1粒子エネルギーは次の関係を満たすことが証明される。

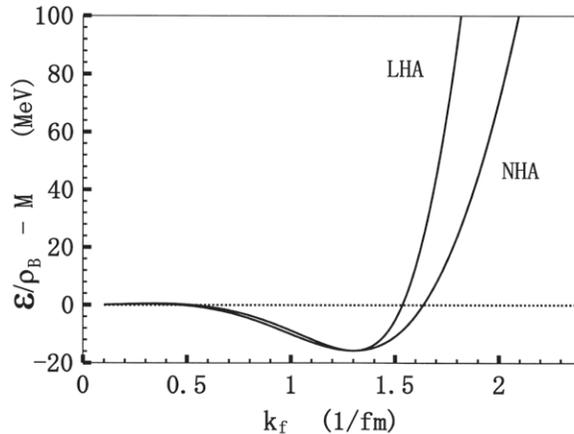


図6 対称核物質の束縛エネルギー、 $\mathcal{E}/\rho_B - M (M=939\text{MeV})$ 。LHA (線形ハートリー近似) と NHA (非線形ハートリー近似)。

$$E(k_F) = \frac{\mathcal{E}}{\rho_B} + \rho_B \frac{d}{d\rho_B} \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho_B} \right), \quad (136)$$

ただし、 \mathcal{E} はエネルギー密度、 ρ_B はバリオン密度、 $E(k_F)$ はフェルミ面（フェルミ運動量 k_F ）での1粒子エネルギーを表わす。方程式(136)は、熱力学的関係式： $\mathcal{E} + p = \rho_B \mu$ と同等である。ただし、 $\mu = E(k_F)$ は核子の化学ポテンシャルとする。

しかし、ここで注意すべきことは、式(136)のエネルギー密度と圧力は強い相互作用を表わすラグランジアン、またはハミルトニアンを通して量子統計力学的に与えられなければならないということである。HV 定理は、一般的な相互作用多体系におけるフェルミ粒子を、準粒子 (quasiparticle) の自由粒子系に変換することであると解釈できる。準粒子の多体系は、化学ポテンシャルと準粒子のエネルギーが等しいという条件 $\mu = E(k_F)$ で適切に定義される。従って、この関係式は、核物質理論の理論的無撞着性をテストするのに用いることが可能であり、任意の近似式の理論的整合性を分析するために応用することができるのである。

このような分析の有名な例が、Brueckner 等による研究である [13]。Hugenholtz と Van Hove [11] が、フェルミ核物質の定理についての一般的な証明を提出したとき、その定理を通して、核物質の Brueckner 等による研究の理論的矛盾を指摘していた。

核物質の飽和点においては、(136)式の第2項が消えるので、フェルミエネルギーは、1核子当たりの平均エネルギーに等しくなる： $E(k_F) = \mathcal{E}/\rho_B$ 。最初の Brueckner 等の核物質に対する計算は、この $E(k_F)$ と \mathcal{E}/ρ_B の値が大きく異なることを示したのであった。Brueckner 等はその後の一連の研究で HV 定理を考慮して、理論的に自己無撞着な計算を数値計算的に非常に良い精度で改良して行ったのであった。

非相対論的な粒子多体系において、エネルギー密度と圧力は、ハミルトニアンと圧力テンソルにより与えられる。同様に、相対論的場の理論においては、基底状態でのエネルギー・運動量テンソルの期待値により表現される： $\langle \hat{T}^{\mu\nu} \rangle$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)。

量子論的エネルギー・運動量テンソルは、ラグランジアン \mathcal{L} から次のように定義される：

$$\hat{T}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)}. \quad (137)$$

ただし、繰り返し使用されている添字 i は、一般化座標 q_i についての和を意味する。絶対温度 $T = 0$ 、基底状態でのエネルギー・運動量テンソルから、エネルギー密度は次のように求められる。

$$\mathcal{E} = \langle \hat{T}^{00} \rangle, \quad (138)$$

そして、圧力は

$$P_{hy} = \frac{1}{3} \langle \hat{T}^{ii} \rangle, \quad (139)$$

として計算される。ただし、 i は、 $i = 1, 2, 3$ の和を取っている。このエネルギー・運動量テンソルから求められた圧力を流体力学的圧力 P_{hy} と定義しておく。

フェルミ粒子系で独立に計算される圧力を、あと2つ導入しておく。熱力学的圧力として

$$P_T = \rho_B^2 \frac{\partial(\langle \hat{T}^{00} \rangle / \rho_B)}{\partial \rho_B}, \quad (140)$$

そして、HV 定理を直接に表わす圧力として、

$$P_{HV} = E(k_F) \rho_B - \mathcal{E}, \quad (141)$$

とする。ただし、絶対温度 $T = 0$ において、 $E(k_F)$ は、フェルミ面での自己無撞着な 1 粒子エネルギーで、 ρ_B はバリオン密度であり、次のようになる。

$$\rho_B = \zeta k_F^3 / 6\pi^2, \quad (142)$$

ここで、パラメタ ζ は、スピン・アイソスピン縮退度を表わし、 $\zeta = 4$ は対称核物質、 $\zeta = 2$ は中性子核物質を表わす [14]。圧力 P_{HV} は、核物質の飽和点で HV 定理を直接に満たすように作られている。圧力は核物質の飽和点で 0 であるので、 $E(k_F) = \mathcal{E} / \rho_B$ となる。この要請が核物質の理論的無撞着性を分析するために役に立つのである。

よって、核物質の HV 定理は、

$$\mathcal{E} + \rho_B^2 \frac{\partial}{\partial \rho_B} \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho_B} \right) = E(k_F) \rho_B, \quad (143)$$

と表わされる。また、熱力学的圧力と流体力学的圧力の等式 $P_{hy} = P_T$ は、ビリアル定理として知られている。

以上より、自己無撞着性は次のようにまとめられる。

$$\rho_B^2 \frac{\partial(\langle \hat{T}^{00} \rangle / \rho_B)}{\partial \rho_B} = \frac{1}{3} \langle \hat{T}^{ii} \rangle, \quad (144)$$

そして、

$$\frac{\partial(\langle \hat{T}^{00} \rangle)}{\partial \rho_B} = E(k_F), \quad (145)$$

となる。原子核物質の飽和点における特性（束縛エネルギー、飽和点密度）は、2つの条件を特に示している。飽和点密度は、(139) – (141) の圧力が 0 という条件で定められる。その時に、同時に束縛エネルギーは HV 定理 $\mathcal{E} / \rho_B = E(k_F)$ 、または、式(145)を満たすように決まるのである。

核物質飽和点の束縛エネルギーの実験値は、 $\mathcal{E} / \rho_B - M_n = -15.75$ MeV, ($M_n = 939$ MeV) であり、飽和点密度は $\rho_B = 0.148$ fm⁻³ ($k_F = 1.30$ fm⁻¹) である。完全流体におけるエネルギー・運動量テンソルの対角成分は、互いに式(144)で関係づけられている。そして、それらの巨視的物理量は 1 粒子エネルギーにより、(145)式で自己無撞着に関係づけられていることになる。

ワレチカ (Walecka) モデルによる相対論的ハートリー近似では、1 粒子エネルギーが

式(144)と(145)を厳密に満たすことを示すことができる。また、相対論的ハートリー・フォック近似では、定常的極限で解析的に証明されている [15]。しかしながら、このような自己無撞着な近似を構成することは、実は非常に困難な問題である。

多体問題における自己無撞着性の問題は、熱力学的無撞着性、保存近似の理論、密度汎関数理論という理論として発展してきている [16-21]。理論の自己無撞着性は、1粒子エネルギー（化学ポテンシャル）を決定することに関係しているため、格子QCD理論における基礎的な符号問題とも関係している。

格子QCD理論における計算では、フェルミ粒子の分配関数が虚数にならないように、0でない実数の化学ポテンシャルを得ることが根本的な問題となっているからである。そうでない場合、結果として、標準的なサンプル統計の重み関数が正定値ではなくなってしまうために、全計算の収束性が得られなくなるからである [22]。困難な問題を避けるべくいくつかの方法が考えられているが、格子QCDでは、Kadanoff-Baym理論、密度汎関数理論として、飽和点の問題は十分に解決されていないのである。以上から理解されるように、核物質の飽和点に於いて、 $\mathcal{E}/\rho_B = E(k_F)$ の関係式と圧力 $p = 0$ を満たすことは、格子QCD理論にとっても、根本的で困難な問題となっていることが分かるであろう。

6 ランダウのフェルミ液体論

ランダウのフェルミ液体論 [23] は、フェルミ系に特徴的な物理量を直接に、最小の基礎的な定数で互いに関係づける理論的方法を与える。理論的には素励起という概念のフェルミ系への応用であり [24]、有限な原子核フェルミ粒子系へも応用されている [25]。

フェルミ液体の物理的状態は、準粒子の分布関数 $n(k_i)$ により、その汎関数としての全エネルギー密度は、 $\mathcal{E}(n_i)$ で特徴づけられることが仮定されている。1個の準粒子 $n(k_i)$ が準粒子の占有状態に移ると、全エネルギーが準粒子のエネルギー分 $E(k_i)$ だけ増減する。

原子核分布関数 $n(k_i)$ は運動量 k_i になめらかに依存して、エネルギー密度は分布関数 $n(k_i)$ に汎関数として依存すると仮定すると、ランダウの準粒子エネルギーは、エネルギー密度 \mathcal{E} を分布関数 n_i で汎関数微分したものとして定義される。

$$\delta\mathcal{E} = \sum_i E(k_i)\delta n_i. \quad (146)$$

そして、準粒子間相互作用は、第2汎関数微分として定義される。

$$\delta E(k_i) = \sum_j f_{ij}\delta n_j. \quad (147)$$

以上の方程式(146)と(147)は、物理系の全エネルギーを準粒子の1粒子エネルギー、準粒子のエネルギーを準粒子間相互作用に関係づけるものである。HV定理においても仮定されているが、相互作用系の準粒子と自由粒子系の粒子は、1対1対応が仮定されている。

ランダウパラメタは準粒子間相互作用 f_{ij} から、巨視的なバリオン・カレントが $\mathbf{j}_B = 0$ の

極限で消える平衡状態（静止平衡状態）において、準粒子運動量 \mathbf{k}_i と \mathbf{k}_j がフェルミエネルギー面上 $E(k_F)$ にあることを仮定して定義される。式(146)は、絶対温度 $T=0$ で準粒子エネルギーがフェルミ面で与えられていて、化学ポテンシャルはフェルミエネルギーと等しい、 $\mu = E(k_F)$ 、ときの熱力学第1法則と同等である。すなわち、巨視的に厳密な式となる。この結果は、熱力学的関係式で与えられる $\mu = (\mathcal{E} + p)/\rho_B$ の式と、理論的に自己無撞着（セルフコンシステント）に計算されるフェルミエネルギー $E(k_F)$ が理論的に一致していることが根本的な要請となっていることを意味している。

準粒子エネルギー相互作用 f_{ij} に対して運動量 \mathbf{k}_i と \mathbf{k}_j をフェルミ面で計算してルジャンドル展開形式で表わす。

$$f_l \equiv \frac{2l+1}{4\pi} \int d\Omega_{ij} P_l(\cos\theta_{ij}) f_{ij}|_{|\mathbf{k}_i|=|\mathbf{k}_j|=k_F}, \quad (148)$$

そして、フェルミ面での相対論的な状態密度を次のように定義する。

$$N_F = \sum_i \left(\frac{\partial n_i}{\partial E_i} \right)_{E_i=\mu} = \frac{\zeta k_F}{2\pi^2} \left(\frac{\partial k_i}{\partial E_i} \right)_{k_i=k_F}, \quad (149)$$

以上の計算量を基礎にして、無次元のランダウパラメタを次のように定義する： $F_l = N_F f_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$)。

縮退度を表わすパラメタは、 $\zeta = 4$ が対称核物質、 $\zeta = 2$ が中性子物質である。

例題：相対論的 σ - ω 平均場理論のフェルミ液体的特性

J. D. ワレチカのモデルとして知られている相対論的 σ - ω 平均場理論にフェルミ液体論を応用する。平均場理論を通して提案されたラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (M - g_\sigma \phi)] \psi - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \phi^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu^2, \quad (150)$$

である。ベクトル、スカラー結合定数はそれぞれ、 g_ω 、 g_σ と書いている。

平均場近似では、中間子場などが、 $\phi = \langle \phi_0 \rangle$ と $\omega_\mu = (V_0, \mathbf{V})$ などの期待値に置き換え

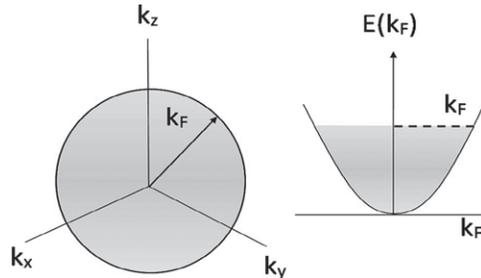


図7 静止核物質系 $\mathbf{j}_B \equiv 0$ のフェルミエネルギー球面と1粒子エネルギー $E(k_F)$ の概略図。1粒子エネルギーは $E(k_F) = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B + \sqrt{k_F^2 + M^2}$ と与えられる。また、 $E(k_F \rightarrow 0) = M$ となっている。

られている。一般的解とディラック場との関係などの導出については、Serot and Walecka [14] の第3章に詳しく議論されているので、それを参考として中間子場の運動方程式を表わすと、

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \sum_i n_i \frac{M^*}{(\kappa_i^2 + M^{*2})^{1/2}} \equiv \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s \\ \langle \omega^\mu \rangle &= (\omega_0, \boldsymbol{\omega}) = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi \rangle = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} (\rho_B, \mathbf{j}_B),\end{aligned}\tag{151}$$

となる。

(1) 上の結果を利用して、平均場理論による σ - ω ラグランジアンから導出されるエネルギー密度について、式(137)と(138)を用いて、次のようになることを示しなさい。

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \mathbf{j}_B^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} (M^* - M)^2 + \sum_i n_i \sqrt{(\mathbf{k}_i - \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \mathbf{j}_B)^2 + M^{*2}},\tag{152}$$

ただし、 n_i は、準粒子分布関数を表わし、 ρ_B はバリオン数密度、 $\rho_B = \sum_i n_i$ を表わす。

核有効質量 M^* とバリオン密度流 \mathbf{j}_B は、エネルギー密度 \mathcal{E} を M^* と \mathbf{j}_B のそれぞれに対して最小化することにより、 M^* と \mathbf{j}_B の自己無撞着な結合方程式が得られる：

$$\begin{aligned}M^* &= M - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \sum_i n_i \frac{M^*}{(\kappa_i^2 + M^{*2})^{1/2}} \\ \mathbf{j}_B &= \sum_i n_i \frac{\boldsymbol{\kappa}_i^2}{(\kappa_i^2 + M^{*2})^{1/2}},\end{aligned}\tag{153}$$

ただし、 $\boldsymbol{\kappa}_i = \mathbf{k}_i - (g_\omega^2/m_\omega^2) \mathbf{j}_B$ と定義している。

(2) エネルギー密度(152)を最小化することにより、(153)式を求めなさい。また、自己無撞着な1粒子エネルギーを(146)式から次のようになることを証明しなさい。

$$\epsilon_i = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \rho_B + \sqrt{\boldsymbol{\kappa}_i^2 + M^{*2}}.\tag{154}$$

準粒子相互作用 f_{ij} は、同様にして(147)から求められて、(参照、ref. [26]) ランダウパラメタが直接に計算される。

無次元化されたランダウパラメタ F_l (実際の物理量の計算では、2次までの展開係数、 F_0 と F_1 などではほとんど十分である) は、観測量に関係づけられることになるが、次のセクションで説明する。

7 核物質の物理的な特性

核物質の非圧縮率 K 、第1音速度 C_1 、対称化エネルギー a_4 などの物理量は、ランダウパラメタを使って、比較的簡単な形式に表現される。非圧縮率 K は、エネルギー密度 \mathcal{E}

のバリオン密度 ρ_B による2階微分 ($\mathbf{j}_B = 0$ の極限において) 定義される。

$$K = 9\rho_B \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_B^2}. \quad (155)$$

エネルギー密度 \mathcal{E} の密度による1階微分は、フェルミ面での1粒子エネルギーに等しい： $E(k_F) = \partial \mathcal{E} / \partial \rho_B = \mu$ (この関係式は、任意の近似に於いて証明されなければならないものである)。

核物質の非圧縮率は、1粒子エネルギー $E(k)$ より計算できて、

$$\begin{aligned} K &= 9\rho_B \frac{\partial \mu}{\partial \rho_B} = 9\rho_B \left[\frac{2\pi^2}{\zeta k_F^2} \left(\frac{\partial E(k)}{\partial k} \right)_{k=k_F} + f_0 \right] \\ &= 9\rho_B (1 + F_0) / N_F, \end{aligned} \quad (156)$$

となる。状態密度は、 $N_F = \zeta k_F^2 / 2\pi^2 (\partial k / \partial E(k))_{k=k_F}$ として具体的に求められる。線形 σ - ω 平均場理論を用いた、ハートリー、ハートリー・フォック近似による非圧縮率の計算結果は、対称核物質と中性子物質に対して、図8に示されている。

流体力学的な相対論的第1音速度 C_1 は次のようになる。

$$C_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \right), \quad (157)$$

ただし、 p は、その物理系の圧力である。関係式、 $p = -\mathcal{E} + \rho_B \mu$ と $\partial p / \partial \rho_B = \rho_B \partial \mu / \partial \rho_B = \frac{1}{9} K$ を利用すると、次の関係が得られる。

$$C_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_B} \frac{\partial \rho_B}{\partial \mathcal{E}} = \frac{K}{9\mu}. \quad (158)$$

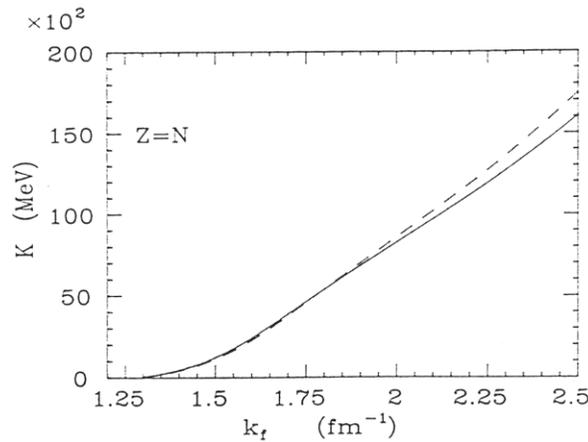


図8 対称核物質の非圧縮率。Dirac-Hartree-Fock (DHF) 近似の結果は連続線、ハートレー近似 (LHA) による計算結果は、破線で示している。

第1音速度に関する結果は、図9に示されている。

核物質の原子核粒子の平均速度は、原子核の標準密度で約 $0.3c$ (c は光速) である。

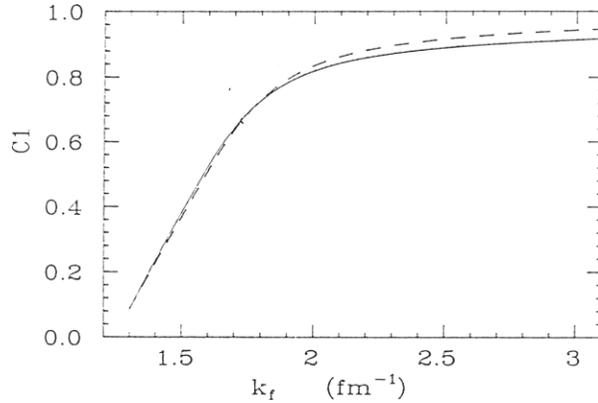


図9 対称核物質の第1音速度の計算結果。

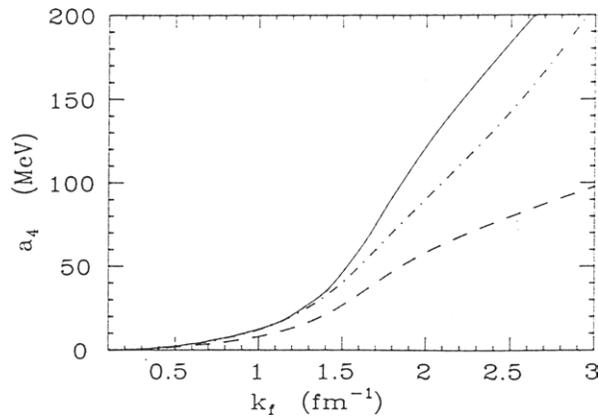


図10 対称化エネルギー a_4 。定常的極限 DHF 近似による結果 (連続線), 平均場 σ - ω 近似 (MFT-I) (破線) と平均場 σ - ω - ρ 近似 MFT-II [27] (点-破線)。

原子核密度の全範囲で光の速度より小さくなっており、因果律に対してコンシステントである。

原子核物質の対称化エネルギーは、

$$a_4 = \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{1}{6} \frac{k_F}{[\partial k / \partial E(k)]_{k=k_F}} (1 + F'_0), \quad (159)$$

となる。ただし、 ρ_3 は、陽子-中性子密度の差を表わし、 $\rho_3 = (k_{F_p}^3 - k_{F_n}^3)/3\pi^2$ である。定数 F'_0 は、無次元化したアイソベクトル準粒子相互作用を表わすランダウパラメタである。対称化エネルギーは、図10に示されている。

対称核物質の無次元化された相対論的ランダウパラメタは、図11に示す。

原子核の非相対論的有効質量、相対論的有効質量の定義 M^* と状態密度に対しては、説明を付け加えて物理的定義の混乱を避ける必要がある。

非相対論的計算に於いては、状態密度は有効質量を定義することに用いられるが、相対論

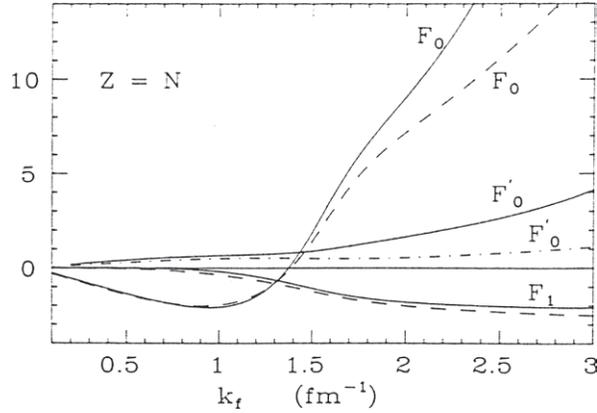


図11 無次元化された対称核物質の相対論的ランダウパラメタ。

的計算では、有効質量はローレンツ変換におけるスカラー量として定義される。従って、非相対論的有效質量と相対論的有效質量の定義は、本質的に異なっている。

相対論的 σ - ω 平均場理論を用いて考える。ハートリー近似に於いて、自己エネルギー(セルフエネルギー)部分は密度の関数となるが容易に求められる。この場合、フェルミエネルギー面上の状態密度 ρ_B/N_F は、直接に計算できて、

$$\frac{\rho_B}{N_F} = \frac{k_F}{3} \left(\frac{\partial E(k)}{\partial k} \right)_{k=k_F} = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{k_F^2}{E^*(k_F)} & \text{相対論;} \\ \frac{1}{3} \frac{k_F^2}{M^*(k_F)} & \text{非相対論,} \end{cases} \quad (160)$$

となる。ただし、 $E^*(k_F) = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ である。非相対論の結果を比較のために併記してある。

この(160)式の結果から明らかなように、非相対論的有效質量 M^* は、相対論的な力学的エネルギー、 $E^*(k_F) = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ と比較すべきものであることが分かる。相対論的有效質量は、非相対論的有效質量に比較して小さく、核物質の飽和点密度に於いて、 $E^*(k_F)/M \simeq M^*/M$ となる。以上より、相対論的有效質量と非相対論的有效質量は、状態密度を通して比較されなければならないことが分かるであろう。

ランダウパラメタ F_1 は、次の関係式から計算できる。

$$\left(\frac{\partial k}{\partial E(k)} \right)_{k=k_F} = \frac{\mu}{k_F} \left(1 + \frac{1}{3} F_1 \right) \quad (161)$$

ただし、化学ポテンシャル $\mu = E(k_F)$ である。この関係式は、良く知られているランダウの有効質量式である [28]。

ランダウのフェルミ液体論は、物理系の全エネルギーと準粒子の自己無撞着な1粒子エネルギーを、動力的に関係づける方法を与えている。物理量は、少しのランダウパラメ

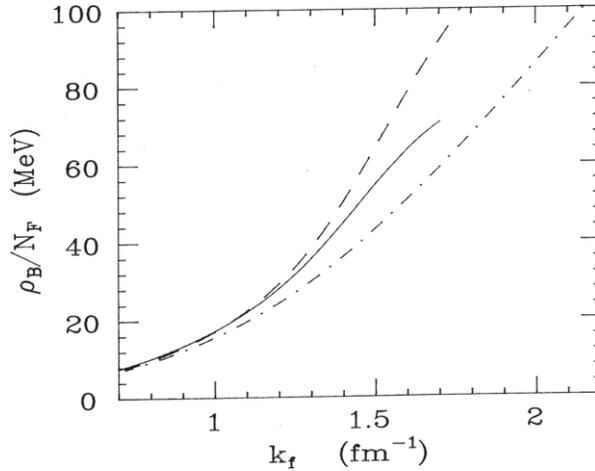


図12 フェルミエネルギー面上での状態密度。

タで理論的に関係づけられる。

強い相互作用をしている多体粒子系で導入される準粒子の概念は、フェルミエネルギー、密度、全エネルギーと構成粒子の持つ対称性により定義される。従って、任意の近似に対して理論的に矛盾のない結果を得るためには、自己無撞着性 (self-consistency) の条件が非常に重要なものとなるのである。

8 密度汎関数理論

密度汎関数理論 (density functional theory, DFT) は、現象論的に厳密な熱力学を土台としていて、これまでの多体問題、ランダウ理論とも共通点を持っている。密度汎関数理論の基本的な目的は、1粒子エネルギーを生成する密度分布関数 $n(r)$ の汎関数、生成母関数 (相互作用をコンシステントに持つ全エネルギー密度) を定義することにあるということが出来る。

自己無撞着な汎関数を得るための条件は、グランドカノニカルポテンシャルの粒子密度 $n(r)$ による汎関数微分、 $\delta\Omega/\delta n(r)$ である。グランドカノニカルポテンシャル Ω は、ヘルムホルツ (Helmholtz) 自由エネルギー F により次のように定義される。

$$F(N, T, V) = \Omega(N, T, V) + \mu N, \quad (162)$$

また、化学ポテンシャル μ は、 $\partial\Omega/\partial N = \partial F/\partial N - \mu = 0$ により、自己無撞着に熱平衡系においてきめる。

密度分布関数 $n(r)$ は、外部ポテンシャル $v(r)$ を用いて $n(r) = \delta\Omega_v/\delta v(r)$ の関係を満たしながらホーエンバーグ-コーン (Hohenberg-Kohn) 自由エネルギー

$$F_{HK}(n(r)) = \Omega_v(n(r)) - \int dr n(r)v(r) \quad (163)$$

によるグランドカノニカルポテンシャル $\Omega_v(n(r))$ の汎関数ルジャンドル変換として定義する。この自由エネルギーが熱平衡状態に於いて、 $n(r)$ により最小化できるとき、 $\delta\Omega_v/\delta n(r) = 0$ が成立して、次の関係式、

$$\frac{\delta F_{HK}}{\delta n(r)} = -v(r), \quad (164)$$

を得る。

関係式(163)は、Hohenberg-Kohn の定理が熱力学平衡系において、(164)式で定義した外部1粒子ポテンシャルを用いて定義されることを示している。そして、絶対温度 $T = 0$ の基底状態は、外部1粒子ポテンシャル $v(r) = 0$ の極限で、グランドポテンシャル Ω の密度 ρ による汎関数微分で決定されるとする。

$$\frac{\delta F_{HK}}{\delta \rho} = \frac{\delta \Omega}{\delta \rho} = 0. \quad (165)$$

よって、DFT 理論による本質的な重要課題は、自己無撞着な汎関数 F_{HK} を作り上げることにある。この課題に関して、保存近似理論が自己無撞着性の理論的構造に関する重要な性質を明らかにすることになる。

9 保存近似の理論

これまでの定理は一般的に成立するものであるが、理論的説明に関しては、これまでの理論の流れから、核物質の相対論的平均場理論を用いて説明する。

核物質は静止系にあるとして、Schwinger-Dyson 方程式によりグリーン関数、 $G(k)$ が定義される。バリオンのグリーン関数は自由場におけるグリーン関数と類似した構造を持つことが仮定されている。それは、相互作用している物理系の1準粒子エネルギー $E(k)$ が on-shell 構造を持ち、自由場の1粒子状態と1対1に対応しているという主張である。この仮定は、保存近似の理論において、自己無撞着性の条件として本質的に要求されるものである。

一様で完全流体的な無限核物質系に於いて、自己エネルギーのマトリックス構造は、一般的に次のようなローレンツ・スカラー形式になることが言える。

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &= \Sigma^s(k) - \gamma_\mu \Sigma^\mu(k) \\ &= \Sigma^s(|\mathbf{k}|, k^0) - \gamma^0 \Sigma^0(|\mathbf{k}|, k^0) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \Sigma^v(|\mathbf{k}|, k^0). \end{aligned} \quad (166)$$

このことから、3個の独立した自己エネルギー関数、 $\Sigma^s(k)$ 、 $\Sigma^0(k)$ と $\Sigma^v(k)$ が存在することが分かる。

自己無撞着な動力学変数（すべて、 $|\mathbf{k}|, k^0$ と k_ρ の関数）は、ディラックの運動方程式

を通して次のように定義される。

$$\begin{aligned} M^*(k) &\equiv M + \Sigma^s(k), & \mathbf{k}^*(k) &\equiv \mathbf{k}(1 + \Sigma^v(k)), \\ k^{*0} &\equiv E^*(k) \equiv (\mathbf{k}^{*2}(k) + M^*(k)^2)^{1/2}, \\ k^{*\mu} &\equiv k^\mu + \Sigma^\mu(k) = (k^0 + \Sigma^0(k), \mathbf{k}^*(k)), & k^0 &= E(k). \end{aligned} \quad (167)$$

核物質は静止系として、グリーン関数 $G(k)$ は、粒子-反粒子プロパゲータ $G_F(k)$ とフェルミ球内のホールプロパゲータ $G_D(k)$ に分解して次のように計算する。

$$G(k) = G_F(k) + G_D(k), \quad (168)$$

$$G_F(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + M^*(k)) \frac{1}{k_\mu^{*2} - M^*(k)^2 + i\epsilon}, \quad (169)$$

$$G_D(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + M^*(k)) \frac{i\pi}{E^*(k)} \delta(k^0 - E(k)) \theta(k_F - |\mathbf{k}|). \quad (170)$$

無限核物質の物理量の計算は、基底状態 $|\Psi\rangle$ におけるフェルミ演算子積の期待値 [14, 29] により与えられるので、エネルギー密度、圧力、その他の熱力学的物理量は、すべて自己無撞着に計算されたグリーン関数で表現されることになる。巨視的な物理量に関する保存法則とファインマン・ダイアグラムの各バーテックスにおけるエネルギー・運動量保存則は、保存近似理論の性質として議論されている [16]。

保存近似理論における本質的な要請は次のように述べられる。

(A) 自己無撞着な1粒子グリーン関数 $G(k)$ は、導入されているハミルトニアン、または、ラグランジアンによって定義される運動方程式を満たすように構成されていなければならない。

(B) 導入される2粒子グリーン関数 $G_2(k_1, k_2)$ は、1粒子グリーン関数 $G(k)$ から構成され、次の対称性の条件、 $G_2(k_1, k_2) = G_2(k_2, k_1)$ を満たさなければならない。

任意のクラスのパインマン・ダイアグラムから計算される自己無撞着なグリーン関数は、基礎的な要請 (A)、(B) を満足するように構築されなければならない。

上述の基本的な要請は、 Φ -derivable 近似 [16] の性質としてまとめられている。特に無限物質系では、有限温度 T の熱力学的ポテンシャル $\omega(T, \mu)$ として、次のように定義される。

$$\omega(T, \mu) = -k_B T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\ln(-G^{-1}) \right] - k_B T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\Sigma G \right] + k_B T \phi, \quad (171)$$

ただし、 k_B は Boltzmann 定数、 μ は化学ポテンシャルである。

熱力学的ポテンシャル ω は、グリーン関数による汎関数微分に対して極値となる： $\delta\omega/\delta G(k) = 0$ 。なぜなら、自己エネルギーは $\Sigma(k) = \delta\phi/\delta G(k)$ となるように構成されるからである。

熱力学的ポテンシャルとエネルギー密度 \mathcal{E} の変分は、 $\delta\omega|_{T,\mu} = \delta\mathcal{E}|_{\rho_B,\sigma}$ (σ は、エントロピー密度) により関係づけられている。以上より、次の根本的な自己無撞着性の条件 [31] が導かれる。

$$\delta\mathcal{E}/\delta\Sigma(k)|_{\rho_B,\sigma} = 0. \quad (172)$$

この関係式が、保存近似理論における本質的に重要な条件である。

自己無撞着性の条件 (172) は、独立な 3 個の自己エネルギー、 $\Sigma^s(k)$ 、 $\Sigma^0(k)$ 、 $\Sigma^v(k)$ の汎関数微分として理解するべきであり、物理的変数でいうならば、自己エネルギーと (167) 式で関係づけられている $M^*(k)$ 、 $k^*(k)$ と $E(k)$ による汎関数微分と理解するべきものである。

エネルギー密度の汎関数微分 $\delta\mathcal{E}/\delta n_i$ は、

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta n_i} = E(k_i) + \sum_l n_l \left[\frac{\delta M^*(k_l)}{\delta n_i} \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta M^*(k_l)} + \frac{\delta \mathbf{k}^*(k_l)}{\delta n_i} \cdot \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta \mathbf{k}^*(k_l)} + \frac{\delta \Sigma^0(k_l)}{\delta n_i} \frac{\delta\mathcal{E}}{\delta \Sigma^0(k_l)} \right]. \quad (173)$$

で与えられる。右辺の自己エネルギーによる汎関数微分、または物理的変数、 $M^*(k)$ 、 $k^*(k)$ 、 $\Sigma^0(k)$ による汎関数微分は、(172) 式の自己無撞着性の性質により消える。

汎関数微分方程式 (172) が解かれたとき、化学ポテンシャルは 1 粒子エネルギーにフェルミ面で等しくなり、 $\mu = E(k_F)$ 、重要な関係式 $\delta\mathcal{E}/\delta n_i = E(k_i) = E^*(k_i) - \Sigma^0(k_i)$ が厳密に成立することになる [31]。

定義式 (172)、 $\delta\mathcal{E}/\delta\Sigma(k) = 0$ 、から計算される自己エネルギーを $\Sigma_L(k)$ と書く。この自己エネルギーは、HV 定理とランダウの準粒子に対する理論的要請を厳密に満足するものである。標準的なファインマン・ダイアグラム規則により計算された自己エネルギーを $\Sigma_F(k)$ と書く。

ここで注意しなければならないことは、ファインマン規則から解析の手順で求められた自己エネルギー $\Sigma_F(k)$ と自己無撞着性の方法による手順で求められた $\Sigma_L(k)$ は、必ずしも同等としないことである。この結果は、ファインマン規則の理論的構造を再度検討する必要があることを示しているものである。

自己無撞着性の条件を満たすことは、理論的に重要であるが、グリーン関数の近似の精度や汎関数形式に関係する内容のために困難な問題を含んでいる。

自己無撞着性の方程式 (172) は、自己エネルギー $\Sigma_L(k)$ を決定する複雑な汎関数微分方程式を導く。解を直接に得ることは非常に困難であるが、ファインマン規則による $\Sigma_F(k)$ の計算が、自己エネルギー $\Sigma_L(k)$ を決定する汎関数微分方程式の厳密解を見つけるのに役立つことは確かである。

また、保存近似の条件は、DFT で議論されている自己無撞着な自由エネルギー、 $F_{HK}(n(k))$ 、を計算するのに役立つ。例えば、Hohenberg-Kohn 汎関数、 $F_{HK}(n(k))$ 、は、

σ - ω 平均場理論では、固定された σ と ρ_B において、厳密に基底状態のエネルギー密度 \mathcal{E} に同等である。

力学的エネルギーの寄与について指摘されている問題 [30] は、保存近似の理論に於いて、自己エネルギーを根本的な方程式(172)で解くことにより明確に解決されている。この自己無撞着な方法は、核物質における Hartree-Fock 近似に応用されている [21]。任意の近似計算の精度と特徴的な構造を自己エネルギー、 $\Sigma_F(k)$ と $\Sigma_L(k)$ を比較することにより分析することが可能である。

結語として：有効場理論としての量子ハドロン力学とクォーク理論

これまで説明してきたように、核物質は原子核理論にとって非常に重要 (fundamental) な問題であり長い歴史を持っている。核物理だけでなく、物理的な多体問題として熱力学的整合性 (thermodynamic consistency)、ランダウ・フェルミ液体理論、密度汎関数理論との関連から、物理的に重要な意味が、1980年代から現在 (2014年現在) にかけて明らかにされてきている。

科学では、説明すべき科学的事実が存在して、可能な限り精密に、その事実を説明しようとするものである。Walecka モデルや Serot 博士による発展した Walecka モデルは明確に美しく整備され、核物理と核物質の性質を大局的に良く説明した [32]。しかし、成功と同時に困難も指摘された。Walecka モデルを改良発展させた Serot 博士の量子ハドロン力学も、最初の繰りこみ可能性を束縛条件とする Walecka モデルから有効場の理論へ改良され、さらに進化して行った。

原子核物理は強い相互作用をする物理系であり、陽子、中性子、中間子などの自由度を用いた相対論的場の理論を基礎にした平均場理論を用いると、成功と同時に困難も明らかになる。しかし、クォーク理論を用いて原子核系の強い相互作用を議論しても、同様に、成功と同時に解決しがたい困難が明らかになる。強い相互作用をする原子核の問題は、非常に大きな問題を含んでいるのである。量子ハドロンモデルでは、陽子、中性子、中間子などの現実的に操作する粒子を直接的な自由度として、核物質理論や原子核相互作用を考えるので、核物質の飽和点の問題や原子核相互作用ポテンシャルの分類と物理的分析が理解しやすい。クォーク理論は、漸近的自由度 (asymptotic freedom) により、ハドロン内部構造に関係する物理量の分類、高エネルギー現象を分析するためには有効であるが、低エネルギー現象の範囲にある原子核相互作用の分析では、基本的に非摂動であるため理論的に大きな困難が生ずるのである。QCD 理論から直接に、原子核飽和点の束縛エネルギーや密度、関連する物理量、実験値を計算することはできていない。

Neutron Stars の第 1 章の理論的議論を導入として、Serot 博士には、QCD モデルの対称性 (ローレンツ不変性、パリティ保存則、時間・荷電変換不変性、アイソスピン対称性、カイラル対称性など) の性質を持つ有効場の理論 (an effective field theory) として、量子

ハドロン力学の物理を、第2章と第3章 (Quantum Hadrodynamics: Evolution and Revolution) で詳しく議論していただいている。低エネルギー領域のQCD物理学の1つの有効場理論の表現として、新しい chiral σ - ω Lagrangian の可能性、繰りこみ可能な Walecka モデルから、原子核密度汎関数理論を基礎にして、繰りこみ可能ではない有効場の理論 (a nonperturbative effective theory) への物理的な議論は非常に読み応えのあるものである。

原子核物理学は強い相互作用をする物理系であり、対称性や束縛条件を頼りに分析しても、非摂動的 (non-perturbative) であることが物理的計算結果の有効性を曖昧にする。Serot 博士は、有効場理論としての量子ハドロン力学とクォーク理論を通して、ハドロン相互作用がハドロン非線形相互作用の丸め込み (truncation) によってどのように現れるか、QCD によって記述されるクォーク・グルーオンの自由度からどのように導出されるかを明らかにすることを目標としている。ハドロンかクォークかではなくて、ハドロンによる理論もクォークによる理論も、原子核相互作用を理解するための大切な物理的自由度なのである。有効ハドロンモデルは原子核飽和点密度付近での計算、クォーク理論は高密度、高エネルギー領域の計算で、相互に理論計算を補うことが望まれる。このように強い相互作用をする原子核系は、非常に困難な問題なのである。

Serot 博士が癌の治療と向き合いながら、このように繊細な研究をされてきたことに敬意を表すると共に、微力ではあるが核物質の研究者の一人として、興味深い物理を追求できたことに感謝している。これからも、原子核物理の発展にとって、Serot 博士は、多くの研究者たちを導く師 (a guiding star) である。

参考文献

- [1] H. Heiselberg and M. Hjorth-Jensen, Phys. Rep. **V328** (2000) 237.
- [2] J. M. Lattimer and M. Prakash, Phys. Rep. **442** (2007) 109.
- [3] R. P. Drake, *High-Energy-Density Physics*, Springer-verlag (2006).
- [4] R. Kippenhahn and A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-verlag (1994).
- [5] N. Straumann, *General Relativity With Applications to Astrophysics*, Springer-verlag (2004).
- [6] I. J. R. Aitchison, *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*, Cambridge University Press (1982).
- [7] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1986).
- [8] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).

- [9] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure: Single-Particle Motion/Nuclear Deformations*, World Scientific (1998).
- [10] B. D. Day, *Reviews of Modern Phys.* **50** (1978) 495.
- [11] N. M. Hugenholtz and L. Van Hove, *Physica* **24** (1958) 363.
- [12] B. D. Serot, *Rep. Prog. Phys.* **55** (1992) 1855.
- [13] K. A. Brueckner and C. A. Levinson, *Phys. Rev.* **97** (1955) 1344; K. A. Brueckner, *Phys. Rev.* **110** (1958) 597; K. A. Brueckner and D. T. Goldman, *Phys. Rev.* **117** (1960) 207; K. A. Brueckner, J. L. Gammel and J. T. Kubis, *Phys. Rev.* **118** (1960) 1438.
- [14] B. D. Serot and J. D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics*, edited by J. W. Negele and E. Vogt, Plenum, New York (1986), Vol. 16.
- [15] H. Uechi, *Nucl. Phys.* **A501** (1989) 813; H. Uechi, *Phys. Rev.* **C41** (1990) 744.
- [16] G. Baym and L. P. Kadanoff, *Phys. Rev.* **124** (1961) 287; G. Baym, *Phys. Rev.* **127** (1962) 1391.
- [17] Y. Takada, *Phys. Rev.* **B52** (1995) 12708.
- [18] *Progress in Nonequilibrium Green's Functions, Progress in Nonequilibrium Green's Functions II*, edited by M. Bonitz, R. Nareyka and D. Semkat, World Scientific (2000).
- [19] W. Kohn and L. J. Sham, *Phys. Rev.* **140** (1965) A1133.
- [20] W. Kohn, *Reviews of Modern Phys.* **71** (1999) 1253.
- [21] H. Uechi, *Prog. Theor. Phys.* **111** (2004) 525.
- [22] M. Buballa, *Phys. Rep.* **407** (2005) 205.
- [23] L. D. Landau, *Sov. Phys. JETP* **3** (1956) 920; **5** (1957) 101.
- [24] G. Baym and C. Pethick, in *The physics of liquid and solid helium, Part II*, ed. K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, John Wiley, New York (1978).
- [25] A. Migdal, *Theory of finite fermi systems and applications to atomic nuclei*, J. Wiley, New York (1967).
- [26] T. Matsui, *Nucl. Phys.* **A370** (1981) 365; H. Uechi, *Nucl. Phys.* **A501** (1989) 813.
- [27] B. D. Serot, *Phys. Lett.* **86 B** (1979) 146 [Erratum: *Phys. Lett.* **87B** (1979) 403].
- [28] G. Baym and S. A. Chin, *Nucl. Phys.* **A262** (1976) 527.
- [29] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, Inc., New York (1971).
- [30] R. M. Dreizler and E. K. U. Gross, *Density Functional Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1990).
- [31] H. Uechi, *Nucl. Phys.* **A696** (2001) 511.
- [32] B. D. Serot, in *Proceedings of the Dirac Centennial Symposium*, ed. H. Bauer and A. Belyaev, World Scientific (2003).