Title	多数決　－単峰的選好を用いた社会厚生関数による特徴づけ－ Majority Voting: A Characterization by the Arrovian Social Welfare Function on the Single Peaked Preference Domain
Author(s)	加茂　知幸 (Tomoyuki Kamo) 入谷　純 (Jun Iritani)
Citation	大阪学院大学　経済論集（THE OSAKA GAKUIN REVIEW OF ECONOMICS）, 第 32 巻第 1-2 号 : 49-76
Issue Date	2018.12.31
Resource Type	Article/ 論説
Resource Version	
URL	
Right	
Additional Information	

大阪学院大学経済論集
第32巻第１・２号、2018年12月

多数決
－単峰的選好を用いた社会厚生関数による特徴づけ－*

加茂　知幸†
入谷　　純‡

概　要

社会的選択理論において、多数決による決定がアロー的社会厚生関数によって是とされるかは、長年の未解決の問題であった。May［8］による解決はよく知られているが、彼の場合は選択肢の数が２という限られた環境であった。本稿では、一般的な環境で、単峰的な選好プロファイルを定義域とするアロー的社会厚生関数が多数決決定となる必要十分条件を提示する。その条件は、「共変性」と「匿名性」である。本稿で、提示される「共変性」はメイの中立性を弱めたものである。今ひとつの本稿の特徴は代数的方法によって社会的選択理論を表現することである。この手法によって、Moulin［10］が面倒だと指摘した追加的な２つの課題についても、肯定的な回答を与える。

キーワード：アロー的社会厚生関数、単峰性、多数決、有限体

JEL 分類番号：D71, 72.

†：京都産業大学教授
‡：大阪学院大学教授

＊　この論文の初期の版には、長久領壱教授（関西大学）、坂井豊貴教授（慶応大学）、篠塚友一教授（筑波大学）、須賀晃一教授（早稲田大学）、そして芹澤成弘教授（大阪大学）より貴重なコメントと助言を頂いた。記して感謝申し上げたい。

1　はじめに

1.1 本稿の目的とまとめ

Arrow[1]が半世紀前に社会的選択の分野を構築して以来、この理論には膨大な研究蓄積がある。

当初のアロー的議論はすでに古典的と見なされるに至っている。とはいえ、古典的なアロー的議論に「集計の問題（aggregation problem）」として新たな角度から光が当てられるようになっている。実際、Dokow and Holtzman[2]そしてNehring and Puppe[11]はアローの理論をその部分として含むような集計問題を提示している。彼らの方法は代数的方法によるもので、それはWilson[13]やRubinstein and Fishburn[12]にさかのぼることができる。

われわれは、アロー的社会選択理論の研究のための今ひとつの代数的方法を提示する。本稿で用いる代数的方法は入谷・加茂[6]で提示されたものである。われわれの方法では有限体上に社会厚生関数を定義し、体の演算（加法と乗法）を活用する。この点で、これまでの代数的方法とは著しい相違を持つ。具体的には、選好の推移性、単峰性等の基礎的な諸性質は体（field）上の**代数的な方程式**によって表現される。

われわれの代数的・算術的な方法がアロー的社会的選択理論に極めて有力な方法となる。その有用性は、代数的方法によって

（*）アロー的社会厚生関数による多数決の特徴付け

をすることができることである。また、代数的方法を用いてアローの定理に別証を与えることもできる。しかし、本稿で用いる代数的方法に基づいた別証は入谷・加茂[6]において既に与えられている。ただし、入谷・加茂[6]の別証は異なる2選択肢に対して無差別関係を含まない厳密な選好の場合のものである。この手法を無差別関係を含む選好を許容する場合にも拡張できるが、本稿

では取り扱わない。また、アローの定理の別証は我々のものだけでなく、多くの研究者によって与えられている[1)]。

一方、（*）はこれまでに十分には解明されていないテーマである。われわれは、アロー的社会厚生関数が多数決決定と整合的となる必要十分条件を提示し、十全な回答を与える。

May[8]は選択肢の数が 2 であるときの社会厚生関数と多数決決定が同値となる条件を提示した。これが有名なメイの定理である。したがって、メイの定理を選択肢が 3 個以上のケースに拡張することは、この分野の主たる目標の一つであった。われわれの結果はこれを解決することとなる。

Moulin[9, 10]は社会厚生関数が多数決決定となるような諸条件を準備している。Moulin[9, 10]における問題（*）を解決するためのキーとなる条件は「架空の投票者（phantom voters）」である。

Moulin[10]によれば、問題（*）の解決を巡って一連の課題が存在する。

それを指摘する部分を引用する。

> Is there an analogous result to May's Theorem for single peaked preferences? In other words, is the majority rule the only social welfare ordering（on the domain single-peaked preference）meeting all properties（α）,（β）, and（γ）?
>
> （α）It aggregates any profile of single-peaked preferences into a single-peaked collective preference.
>
> （β）It is monotonic and satisfies IIA.
>
> （γ）It is anonymous and Paretian.

Moulin[10]によれば、この課題の解決を困難にしていることは、

1）上述の研究者に加えて、Geanakoplos[4]による証明もある。

単峰性が選択肢のある並びに線形順序を前提とする

という点である。一方、多数決決定は、社会厚生関数が中立的である（選択肢の並び方に依存しない性質）ことを要求する、そのため、単峰性と中立性が必ずしも両立しないという可能性がある。Moulin[10]の架空の投票者（phantom voter）の導入は、このためであった。本稿では、架空の投票者は必要としないことを強調しておきたい。

さらに、本稿の定理２で、ムーランの課題（α）に肯定的な回答を与える。すなわち、

> アロー的社会厚生関数が単峰性をもつ選好プロファイルの定義域上で定義され非対称的で完備かつ推移的な選好の集合 $\mathcal{P}$ を値域とする2)。この時、社会厚生関数は、IIAとパレート性を満たすなら、単峰的な選好値を取る（定理２)。

が示される。つまり、本稿では、社会厚生関数が単峰的選好を値域に持つことは仮定されていないのである。さらに、定理２より一般的な結果も与えられる。つまり、アロー的社会厚生関数の値域を対称的な選好の集合に拡張したときも、同様の結果が示される。すなわち、アロー的社会厚生関数の値は多くて２個の最良選択肢を持つ単高原的（single plateaued）な選好となることである。これが定理１である。これらの定理の証明において、社会的厚生関数の値域を単峰系の選好の集合に限定していないことを再度強調しておこう3)。

2）選好が非対称（asymmetric）であるとは、選好が異なる選択肢に対して無差別関係を含まず厳密な選好のみからなることを意味する。
選好が完備（complete）であるとは、あらゆる選択肢の組に対してどちらが良いかの判定が可能であることである。
選好 $\succ$ が推移的（transitive）であるとは、異なる選択肢 a,b,c に対して、$a \succ b$ かつ $b \succ c$ であれば、$a \succ c$ が成り立つことである。

3）Moulin[9, 10]を参照せよ。

最後に、本稿での課題（*）に関する成果は次のようにまとめられる。

> 個人の数を奇数とし、単峰的な選好の集合を定義域とし、$\mathcal{P}$ を値域とする社会厚生関数を前提とする。このとき、多数決投による決定は、IIAパレート性、共変性（covariancy）[4]、そして匿名性を満たす唯一の社会的厚生の順序づけである。

ここで最も重要な条件は共変性である。これは任意の選択肢のペア (a, b) に対して、ある選好プロファイルのもとで、社会的に a を是とするとしよう。このとき、 a, b への順序づけが完全に逆になる別の選好プロファイルのもとでは、社会的な選択は b を是とするということである。

以上の結果によって、Moulin[10]の課題（α）,（β）,（γ）は肯定的に解決される。

1.2 他の文献との関連

Wilson[13]の先駆的な貢献において、彼はアロー的社会的選択理論をより一般的な集計問題理論に拡張した。すなわち、彼の枠組みでは選好に加えて「属性の集計」も検討することが可能となった。

Rubinstein and Fishburn[3, 12]では多くの集計問題を統合して扱うことのできる一般理論を代数的基板の上に構築した。彼等のモデルでは、集計作業の定義域はある体上の有限次元ベクトル空間である。Rubinstein and Fishburn[3, 12]においては、線形空間の線形性そのものが重要な役割を演じた。線形空間の固有の演算については本質的な役割が与えられていない。本稿において、有限体を用いて選好の集計問題を定式化する点では共通点を持つが、可換環の構造（代数演算）そのものを活用する点で大きく異なる。すなわち、われわれは社会的選択理論において演算という代数的・算術的構造が有用な手段となるこ

4）May[8]による中立性の一般化された条件である。

とを示す。

Dokow and Holzman[2]は二つの評価値0, 1からなるベクトル空間をもちいて一般化集計問題を論じ、アロー的な集計作業が独裁的となるドメインを特徴付けた。彼等の一つの特徴は“total blockedness”を主たる概念として用いている。この概念は、Nehring and Puppe[11]において導入されたもので、有向グラフによってドメインの組み合わせ論的性質を記述するものである。今ひとつの特徴は、ドメインが線形空間のアフィン部分空間であることを要求することである。われわれの本稿での議論と彼等の議論とのつながりを明らかにすることはこれからの課題の一つとなろう。

2　社会選択の代数的表現

記号法：$\mathbb{Z}$ を整数からなる有理整数環とする。$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を整数 p を法とする商環（剰余環）とする。p が素数の時、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は有限体となる。それを $\mathbb{F}_p$ と書く。$\mathbb{F}_p$ の加法と乗法を $+$, $\cdot$ であらわす。K を体 field とする[5)]。K 上の n 次アフィン空間を $\mathbb{A}^n(K)$ と書く。

A を非空で有限個の選択肢の集合とする。H を個人の集合で、個人の数 n は有限とする。$|A| \geqq 3$ かつ $|H| > 2$ とする[6)]。$T \subset A \times A$ を A のすべての異なる要素のペアからなる集合とする。記号 $\succsim$ によって A 上の選好関係を表す。選好関係は反射的、推移的、かつ完備な二項関係とする。無差別関係を含むあらゆる選好関係の集合を $\mathcal{R}$ とする。異なる選択肢について無差別関係を含まない厳密なすべての選好関係の集合を $\mathcal{P}$ で表す。

---

5) K 上のアフィン n 空間は K の n 個の組からなる集合である。詳細は、Hartshorne[5]を参照せよ。

6) S を集合とするとき、$|S|$ は S の濃度（要素の数）を表す。

2.1 選好関係

選好関係を代数的に表現することからはじめる。$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ を有限体とする。体の演算 $+$ と $\cdot$ は次を満たす。

$$x + y = y + x,\ x \cdot y = y \cdot x,\quad \forall x, \forall y \in \mathbb{F}_3,$$
$$0 + x = x,\ 1 \cdot x = x,\ 0 \cdot x = 0,\quad \forall x \in \mathbb{F}_3,$$
$$1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 0,\ 2 + 2 = 1,\ 2 \cdot 2 = 1.$$

以下で、選好関係を $\mathbb{A}^T(\mathbb{F}_3)$ の要素として表す。任意の $\succsim \in \mathcal{R}$、任意の $(a, b) \in T$ に対して、関数 $q : \mathcal{R} \times T \to \mathbb{F}_3$ を次のように定義する[7)]。

$$q(\succsim, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \succsim b \text{ and } b \not\succsim a, \\ 0 & \text{if } b \succsim a \text{ and } a \not\succsim b, \\ 2 & \text{if } a \succsim b \text{ and } b \succsim a. \end{cases}$$

q の定義によって次は自明である。

$$q(\succsim, a, b) = 1 \Leftrightarrow q(\succsim, b, a) = 0,$$
$$q(\succsim, a, b) = 0 \Leftrightarrow q(\succsim, b, a) = 1,$$
$$q(\succsim, a, b) = 2 \Leftrightarrow q(\succsim, b, a) = 2.$$

これらを代数的に言い換えると、q は次の反転公式を満たす。

$$\textbf{反転公式}：\forall (a, b) \in T:\ q(\succsim, a, b) = 2 \cdot q(\succsim, b, a) + 1.$$

いま、

$$u(a, b) = q(\succsim, a, b), \forall (a, b) \in T$$

7）記号法 $a \not\succsim b$ は $a \succsim b$ の否定命題である。（$a \succsim b$ and $b \not\succsim a$）,（$b \succsim a$ and $a \not\succsim b$）,（$a \succsim b$ and $b \succsim a$）はそれぞれ $a \succ b$，$b \succ a$，$a \sim b$ と表記される。$\succ$ と $\sim$ はそれぞれ $\succsim$ に含まれる非対称要素の集合と無差別要素の集合となる。ただし $\succ \in \mathcal{P}$ であるとは限らない。

と定義すれば、関数 $u(a,b)$ は $\succsim$ の代数的表現である。

A の異なる３つの選択肢を a,b,c とする。選好 $\succsim$ の推移性を $u=q(\succsim,\cdot,\cdot)$ によって代数的に表現すれば、次の通りである[8)]。

$$\begin{cases} u(a,b)\cdot u(b,c)\cdot u(c,a)=0, \text{ and} \\ (u(a,b)+2)\cdot(u(b,c)+2)\cdot(u(c,a)+2)=0, \end{cases} \tag{1}$$

or

$$u(a,b)=u(b,c)=u(c,a)=2 \tag{2}$$

上で任意の $\succsim\in\mathcal{R}$ に対応する関数 u を用いて、代数的方法を提示する。u は次の条件 (**I**) と (**T**) を満たすと仮定する。

(**I**) 任意の $(a,b)\in T$ に対して、u は反転公式を満たす。つまり、

$$u(a,b)=2\cdot u(b,a)+1.$$

(**T**) 任意の異なる $\{a,b,c\}\subset A$ 、について、$u(\cdot,\cdot)$ は(1)または(2)を満たす。

$\mathcal{R}$ には異なる選択肢に無差別関係を含まない選好 $\succ$ が含まれる。同様にして $\succ$ にたいして、対応する $v\in\mathbb{A}^T(\mathbb{F}_3)$ が存在して、条件 (**I**) と (**T**)-(1)を満たす。ここで、$v(a,b)\in\{0,1\}$ が任意の $(a,b)\in T$ に対して成立する[9)]。

次のように $\mathbb{A}^T(\mathbb{F}_3)$ の部分集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を定義する。

$$\mathcal{U}:=\{u\in\mathbb{A}^T(\mathbb{F}_3)\mid u \text{ は (\textbf{I}) と (\textbf{T}) を満たす}\},$$
$$\mathcal{V}:=\{v\in\mathcal{U}\mid \forall t\in T,\ v(t)\neq 2\}.$$

明らかに、$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ はそれぞれ $\mathcal{R}$ と $\mathcal{P}$ に同型（isomorphic）である。

各個人 $h\in H$ の選好を $\succsim_h\in\mathcal{R}$ とすれば、$(\succsim_h)_{h\in H}\in\mathcal{R}^H$ は**選好プロファ**

8）証明は数学付録Aを参照せよ。
9）数学付録Aを参照せよ。

イルである。$u_h = q(\precsim_h, \cdot, \cdot)$ とすれば、選好プロファイルは $(u_h)_{h \in H} \in \mathcal{U}^H$ と同一視される。ここで $|T| \times |H|$ の行列 $U = (U_h^t)$ を、その第 $(t, h) \in T \times H$ 要素 U_h^t を第 h 個人の選択対象の組 t に対する選好値 $u_h(t)$ であると定義する。選好プロファイルは $(u_h)_{h \in H}$ は行列 U に他ならない。第 $h \in H$ 個人の選好は $u_h = u_h(t)_{t \in T}$ であり U の第 h 列ベクトル U_h と一致し、**選択対象** $t \in T$ **についての選好プロファイル** $(u_h(t))_{h \in H}$ は U の第 t 行ベクトル U^t となる。つまり、

$$U_h = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_h(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = u_h,\ U^t = (\cdots, u_h(t), \cdots)$$

である。以下では、$\mathcal{R}$ と $\mathcal{U}$ そして $\mathcal{P}$ と $\mathcal{V}$ とを区別しない。

2.2 社会厚生関数

$\mathcal{R}^H$ の部分集合 $\mathcal{D}$ 上で定義され、$\mathcal{R}$ を値域とする**社会厚生関数** F は選好プロファイル $U \in \mathcal{D}$ に対して、列ベクトル $F(U) \in \mathcal{R}$ を対応させる関数である。それを

$$F(U) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{f}_t(U) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

と書く。ここで、$\bar{f}_t$ は F の第 t 要素である、$t \in T$。明らかに、$F(U)$ は(**I**)（反転公式）と（**T**)（すなわち、(1)または(2)）を満たしている。

定義 1　社会厚生関数 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ について次の用語を定義する。

（**IIA**）F が**独立**であるとは、任意の $t \in T$ について、$\bar{f}_t$ が U の第 t 行 U^t の

みに依存して決まることである。

（**P**） F が**パレート性**を満たすとは任意の $U \in \mathcal{D}$ について、U の第 t 行 $U^t = \mathbf{0}$（resp. $= \mathbf{1}$）であれば、$\bar{f}_t(U) = 0$（resp. $= 1$）となることである。ここで、$\mathbf{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ かつ $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ である。

（**IIA**）と（**P**）を満たす社会厚生関数 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ を**アロー的である**（Arrovian）と呼ぶ。

任意のアロー的社会厚生関数 F に対して、ベクトル関数 $(f_t)_{t \in T}$，$f_t : \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{F}_3$ が存在して、任意の $U \in \mathcal{D}$ について

$$F(U) = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_t(U^t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる。f_t の定義域は各個人の $t \in T$ に対する選好プロファイル $x \in (\mathbb{F}_3)^H$ であり、値域は $\mathbb{F}_3$ である。（**IIA**）によって、関数 $\bar{f}_t$ の定義域を狭めることができ、それを f_t としているのである。上述の（**P**）により、任意の $t \in T$ について $f_t(\mathbf{0}) = 0$ かつ $f_t(\mathbf{1}) = 1$ である。

選択肢の組 $(a, b) \in T$ に関する選好プロファイルが $x \in \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ であったとする。反転公式によって、$2 \cdot x + \mathbf{1}$ は選択肢の組 $(b, a) \in T$ に対する選好プロファイルとなる。これらは a, b に対する同一の選好表現であるので、$f_{(a,b)}(x)$ の値は、$f_{(b,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1})$ の反転でなければならない。したがって、次の社会的反転公式（**SIV**）をアロー的社会厚生関数に要求する。これは、社会厚生関数に整合性を要求することに他ならない。

（**SIV**）任意の選択肢の組 $(a, b) \in T$ と (a, b) に関する任意の選好プロファイル

$x \in \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ に対して

$$f_{(a,b)}(x) = 2 \cdot f_{(b,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) + 1,$$
$$2 \cdot x + \mathbf{1} = (\cdots, 2 \cdot x(h) + 1, \cdots) \in \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$$

が成立する。ここで、$x(h)$ は $|H|$ 次元ベクトル x の第 h 要素である。

2.3 単峰性と多数決

本稿での主たるテーマである単峰性を検討する。まず、単峰性を満たす選好を代数的に表現することからはじめる。$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ と表す。順序 $<$ を A 上の線形順序とする。 必要なら番号の付け替えを行って、$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ となるものとする[10)]。厳密な選好 $v = (v_t)_{t \in T} \in \mathcal{P}$ が A 上の線形順序 $<$ に関して**単峰的**（sigle peaked）であるとは、ある番号 $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ が存在して

$$v(a_{i-1}, a_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leqq k \\ 1 & \text{if } i \geqq k+1 \end{cases}$$

となることである。上式において $k = 1$ の場合は $v(a_{i-1}, a_i) = 0,\ i = 2, \ldots, m$ となる場合であり、$k = m$ の場合は、$v(a_{i-1}, a_i) = 1,\ i = 2, \ldots, m$ となるケースである。選択対象 a_k がピークである。

$\mathcal{SP}$ を単峰性を満たす $\mathcal{P}$ の部分集合とする。

選好 $v \in \mathcal{SP}$ の単峰性は代数の言葉で次のように表現することができる。

（**SP**）任意の 3 個の異なる選択肢 $a, b, c \in A$ を取り上げる。ただし、$a < b < c$ を満たすものとする。このとき

10）$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 上の線形順序 $<$ とは完備で推移律を満たし、かつ、$a_i < a_k$ かつ $a_k < a_i$ となる $i, k (i \neq k)$ は存在しない（反対称的な） 順序である。 例えば、$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ となるケースである。

$$v(a,b)\cdot(v(b,c)+2)=0 \tag{3}$$

　であることが単峰性の必要十分条件である。

実際、v が単峰的であれば（**SP**）を満たすことは明らかである。
逆に選好 $v\in\mathcal{P}$ が A の線形順序 $a_1<a_2<\cdots<a_m$ のもとで、（**SP**）を満たすとする。$v(a_1,a_2)=1$ であれば、(3)より、任意の $j,j+1,\ (2<j<m)$ について $v(a_2,a_j)=1$ である。したがって、再び(3)より $v(a_j,a_{j+1})=1$ である。これは単峰性である。次に、$v(a_1,a_2)=0$ の場合を考察する。(3)より $v(a_2,a_3)=0,\ \text{or}\ 1$ である。$v(a_2,a_3)=1$ なら、任意の a,b, $a_2<a<b$ について $v(a,b)=1$ となり v は単峰的である。$v(a_2,a_3)=0$ なら $(a_i,a_{i+1}),i\geqq 3$ に同じ議論を繰り返すことができる。A の要素の数は有限であるから、v は単峰的である。
　$\mathcal{P}^H$ の選好プロファイルの中で、単峰性を満たすものを記号 $\mathcal{SPH}$ で表す。つまり、

$$\mathcal{SPH}=\{V\in\mathcal{SP}^H\mid A\ \text{上のある線形順序のもとで、各}\ V_h\ \text{は}\ (\mathbf{SP})\ \text{を満たす}\}$$

である。選好 $u\in\mathcal{R}$ が**単高原的**（single-plateaued）と呼ばれるのは、A 上の線形順序 $<$ があり（$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$, $a_1<a_2<\cdots<a_m$）、ある自然数 k_1,k_2, $1\leqq k_1\leqq k_2\leqq m$ が存在して、

$$\begin{aligned}
u(a_i,a_{i+1})&=0,\quad \text{for}\ i=1,\ldots,k_1,\\
u(a_i,a_{i+1})&=2,\quad \text{for}\ i=k_1+1,\ldots,k_2,\\
u(a_i,a_{i+1})&=1,\quad \text{for}\ i=k_2+1,\ldots,m-1.
\end{aligned}$$

が満たされることである。
　社会厚生関数の定義域を $\mathcal{SPH}$ とするとき、値域が $\mathcal{R}$ の場合と、$\mathcal{P}$ である場合に応じて、次の二つの定理が得られる。

定理 1　F を単峰的な選好プロファイルの集合 $\mathcal{SPH}$ を定義域とし、値を $\mathcal{R}$ にとるアロー的な社会厚生関数とする。このとき、各 $V \in \mathcal{SPH}$ にたいして、$F(V)$ は単高原的となる。さらに、$F(V)$ の単峰性を支える A 上の線形順序は選好プロファイル V に付属する線形順序である。また、$F(V)$ の最大要素はせいぜい 2 個である。

証明は数学付録B.1を参照せよ。

定理 1 での証明を繰り返すことによって、次の定理が得られる。

系 1　F を単峰的な選好プロファイルの集合 $\mathcal{SPH}$ を定義とし、値を $\mathcal{P}$ にとるアロー的な社会厚生関数とする。このとき、各 $V \in \mathcal{SPH}$ にたいして、$F(V)$ は単峰的となる。

系 1 は序で紹介したムーランの課題（α）への解答である。定理 1 は単峰的な選好にドメインを持つどのようなアロー的社会厚生関数も値を $\mathcal{R}$ に持つなら、ほどんど単峰的であること、表現を変えれば、最小限の単高原性を有することを示している。さらに、定理 1 、系 1 はMoulin[10]における多数決投票の定理に対応するものである。

本稿での目的は、多数決をアロー的社会厚生関数によって特徴付けることである。具体的には、多数決ルールは**匿名性**と**共変性**を満たす $\mathcal{SPH}$ をドメインとする社会厚生関数と同値であることを示す。

社会厚生関数は条件「厚生関数の値が個人の名前によって変化しない」を満たすとき**匿名性**を満たすといわれる。厳密な選好 $\succ' \in \mathcal{P}$ が選好 $\succ \in \mathcal{P}$ の**逆転**であるとは、$a \succ' b$ である時かつその時に限り $b \succ a$ となることである。さらに、社会厚生関数が**共変的**であるとは、すべての個人の選好が逆転されたときに社会厚生関数の値も逆転されることである。フォーマルな定義は次である。

定義 2　単峰的な選好プロファイルからなる定義域上で定義された社会厚生関数 $F:\mathcal{SPH}\to\mathcal{R}$ に関して次の用語を定義する。

(**A**) 任意の $t\in T$ と任意の $x\in\{0,1\}^H$ にたいして、 y を x の要素を並び替えたものとする。 F が**匿名性**を満たすとは、次が成り立つことである。

$$f_t(x)\neq 2 \ \Rightarrow\ f_t(x)=f_t(y).$$

(**C**) F が**共変的**であるとは、任意の $t\in T$ と任意の $x\in\{0,1\}^H$ について、

$$[f_t(x)=0\Rightarrow f_t(2\cdot x+\mathbf{1})=1] \text{ かつ } [f_t(x)=1\Rightarrow f_t(2\cdot x+\mathbf{1})=0]$$

が成り立つことである。

匿名性は、通常、条件 (**A**) で表される。一方、条件 (**C**) はMay[8]の中立性条件（III）に類似のものである[11)]。条件（**C**）は (a,b) についての選好プロファイルにおいて選択肢 a が社会的に b より良いとされるときに、逆転された選好プロファイルのもとでは社会的に選択肢 b が a より良いとされるべきであるという要求である。共変性は (**SIV**) と形式はよく似ている、共変性では右辺と左辺の選択肢の組 t が同一であることに注意が必要である。

$U=(U_h^t), h\in H, t\in T$ を選好プロファイルとするとき、 A の関係 M が**厳密な多数決**であるとは、任意の $(a,b)\in T$ について、

$$aMb \ \Leftrightarrow\ |\{h\in H|U_h^{(a,b)}=1\}|>|\{h\in H|U_h^{(a,b)}=0\}|.$$

を満たすことである。関係 M は常に $\mathcal{R}$ の要素とは限らないことに注意せよ。

本稿での主たる結果は次である。

11) 本稿で採用している（**C**）は F の定義域が制限されているという点でMay[8]の中立性より弱い条件である。

定理 2　$\mathcal{SPH}$ を定義域とし、$\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数において、次の（i）と（ii）は同値である。

（i）　F は厳密な多数決である。

（ii）　F は匿名性（**A**）と共変性（**C**）を満たす。

定理 2 は次のように解釈できる。$|H| = n$ とする。

（**Case 1**：n **が奇数の時**）中位投票者の定理は多数決が定義域を $\mathcal{SPH}$ をより狭めた（**A**）と（**C**）を満たすアロー的社会厚生関数である。定理 2 は一般的な定理となっており、その逆も含んでいる。さらに、これは序にあげたムーランの課題（α）、（β）、そして（γ）へのわれわれの解答である。

（**Case 2**：n **が偶数の時**）多数決は引き分けに終わることがある。このとき、定理 2 の「（i）→（ii）」の部分は形式的に真（vacuously true）である。さらに、定理 2 の一方の命題「（ii）→（i）」についても、やはり、形式的に真となる。実際、以下に示される補助定理 2、3 によって、条件（**C**）のもとで、F の値は単峰的となる。さらに、$n = 2k$ として、$\hat{x} = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{k}, \overbrace{1 \ldots, 1}^{k})$ とする。$\hat{x}$ を $t \in T$ の選好プロファイルとすれば、（**A**）と（**C**）とが矛盾する。したがって、命題（ii）の真理値は偽である。

定理 2 の成立に条件（**C**）がどのような役割を演じているかを説明しておきたい。そのために、次の用語を定義する。

定義 3　$\mathcal{SPH}$ を定義域、$\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数 F に次の用語を定義する。

（**M**） F が**単調, monotonic** であるとは、任意の $t \in T$ と任意の $h \in H$ について $y(h) = 0$ ならば $x(h) = 0$ となる任意の $x, y \in \{0,1\}^H \subset \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ に対して

$$f_t(y) = 0 \ \Rightarrow f_t(x) = 0, \text{ かつ}$$
$$f_t(x) = 1 \ \Rightarrow f_t(y) = 1$$

となることである。

（**N**） F が中立的 neutral であるとは、任意の $t, t' \in T$ 、任意の $x \in \{0,1\}^H \subset \mathbb{A}^H(\mathbb{F}_3)$ に対して次が成り立つことである。

$$f_t(x) \neq 2 \ \Rightarrow \ f_t(x) = f_{t'}(x).$$

(**M**) は次を要求している。a, b を異なる選択肢とする。ある個人の集団が b より a を選好するとき、選択肢 a が b より社会的に選好されるとする。このとき、他の選好プロファイルに置いて、当該集団を含む個人の集まりが b より a を選好するとき、社会的にも a が b より選好される。これは、May[8]によって導入された「**正の感応性**（positive responsiveness）」より強い条件である。条件 (**N**) は次の通りである。ある選択肢のペアに対する選好プロファイル x が与えられたとする。当該プロファイル x のもとでの当該ペアへの社会的決定が無差別値となる場合を除いて、どの選択肢のペアへの選好プロファイルが x である限り、社会的選択は同一となることを意味する。

ここで、単峰性と中立性とが両立可能になることを説明しておこう。n 人の集合的選択ルールが「字義通りに中立的である」とは、ルールが選択肢の並び替えに依存しないことである。本稿では、中立性概念を少し違った角度から眺めている。つまり、われわれは (**N**) において集団的決定が中立的であることを、f_t の値が、t の選択に依存しないことに注目している。この議論で

は、選択肢の並べ替えを必要としない。

ここで定理２のためのいくつかの補助定理を示しておこう。証明はすべて**数学付録B.2**に示されている。

補助定理 1　F を $\mathcal{SPH}$ を定義域とし $\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数とする。F が $(\mathbf{N})$ を満たすなら $(\mathbf{M})$ が成立する。

補助定理１は、条件 $(\mathbf{N})$ がムーランの課題 (β) への今ひとつの解答である。

補助定理 2　F を $\mathcal{SPH}$ を定義域とし $\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数とする。F が $(\mathbf{N})$ を満たすなら、任意の $V \in \mathcal{SPH}$ にたいして、$F(V)$ は単峰的である。

補助定理２では社会厚生関数の値が単高原的とはならないという点で、定理１と違いを持つ。補助定理２と定理１はムーランの課題 (α) と深く関わっている。

補助定理 3　F を $\mathcal{SPH}$ を定義域とし $\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数とする。このとき、F が $(\mathbf{C})$ を満たすことと $(\mathbf{N})$ をみたすことは同値である。

補助定理３によって、$\mathcal{SPH}$ を定義域とし $\mathcal{R}$ を値域とする $(\mathbf{C})$ を満たすどのようなアロー的社会厚生関数にたいしてもある関数 $g : \{0,1\}^H \to \mathbb{F}_3$ が存在して、任意の $x \in \{0,1\}^H$ と任意の $t \in T$ に対して $g(x) = f_t(x)$ となる。

定理 2 の証明

アロー的社会厚生関数 F による順序づけが厳密な多数決決定と一致するなら、$(\mathbf{C})$ と $(\mathbf{A})$ を満たすのは明らかである。証明すべきはその逆である。アロー的社会厚生関数 F が匿名性を満たし、同時に共変的であると仮定する。補助定理１、３によって、F は $(\mathbf{M})$ と $(\mathbf{N})$ を満たす。さらに、補助定理２

によって、 F の値は $\mathcal{SP}$ の中にある。したがって、 $\{0,1\}^H$ を定義域、 $\{0,1\}$ を値域とする関数 g が存在して、任意の $t \in T$ にたいして、 $g = f_t$ である。任意の $x \in \{0,1\}^H$ に対して、集合

$$H^1(x) = \{h \in H \mid x(h) = 1\}$$

を定義する。ある $y \in \{0,1\}^H$ について $g(y) = 1$ であるとする。 $\hat{x}$ を次を満たすベクトルとする。

$$\hat{x} \in \arg\min\{|H^1(x)| \mid g(x) = 1\}.$$

定義によって、 $|H^1(y)| \geqq |H^1(\hat{x})|$ である。一方、 F は共変性を満たすから、 $g(2 \cdot \hat{x} + \mathbf{1}) = 0$ でなければならない。(**A**)、(**C**) そして (**M**) によって、 $|H^1(2 \cdot \hat{x} + \mathbf{1})| < |H^1(\hat{x})|$ に至る。また、補助定理 2 により、 $|H^1(2 \cdot \hat{x} + \mathbf{1})| + |H^1(\hat{x})| = n$ であるから、 $|H^1(\hat{x})| > n - |H^1(\hat{x})|$ となり、従って、

$$|H^1(\hat{x})| > \frac{n}{2}$$

が成立する。さらに、 $|H^1(y)| \geqq |H^1(\hat{x})| > n/2$ であることも明らかである。

　また、あるベクトル $y \in \{0,1\}^H$ について $|H^1(y)| > n/2$ となった場合には、補助定理 2 によって $g(y) \neq 2$ である。 $g(y) = 0$ と仮定すれば、(**C**) より $g(2 \cdot y + \mathbf{1}) = 1$ である。しかしながら、 $|H^1(2 \cdot y + \mathbf{1})| < n/2 < |H^1(y)|$ を考慮すると、(**A**) と (**M**) によって、 $g(y) = 1$ となる。これは矛盾である。よって、 $g(y) = 1$ である。[証了]

参考文献

[1] Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values* (2nd. edition), Wiley, (1963).

[2] Dokow, E. and R. Holzman: “Aggregation of Binary Evaluations”, *Journal of Economic Theory*, 145 (2010), 495-511.

［３］Fishburn, P. and A. Rubinstein: “Aggregation of Equivalence Relations”, *Journal of Classification*, 3（1986）, 61-65.
［４］Geanakoplos, J.: “Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem”, *Economic Theory*, 26（2005）, 211-215.
［５］Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag,（1977）.
［６］入谷純、加茂知幸：「代数によるアローの定理の別証明」、『大阪学院大学経済論集』、（2016）。
［７］Lang, S.: *Algebra*, Addison-Wesley,（1965）.
［８］May, K.: “A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Majority Decision”, *Econometrica*, 21（1952）, 680-684.
［９］Moulin, H.: “Generalized Condorcet winners for single peaked and single plateaued preferences,” *Social Choice and Welfare*, 1（1984）, 127-47.
［10］Moulin, H.: *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge,（1988）.
［11］Nehring, K. and C. Puppe: “The Structure of Strategy-Proof Social Choice―Part I: General Characterization and Possibility Results on Median Space”, *Journal of Economic Theory*, in press.
［12］Rubinstein, A. and P. Fishburn: “The Algebraic Aggregation Theory”, *Journal of Economic Theory*, 38（1986）, 63-78.
［13］Wilson, R.: “On the Theory of Aggregation”, *Journal of Economic Theory*, 10（1975）, 89-99.

数学付録

A　選好の推移性

関数 $u(\cdot,\cdot)\in\{0,1,2\}^T$ を選好 $\succsim\in\mathcal{R}$ の代数的表現とする。a,b,c を任意の異なる選択対象とする。$\succ$ と $\sim$ をそれぞれ $\succsim$ の非対称要素と対象要素の集合とする。$u(\cdot,\cdot)$ が推移性と両立するすべての可能な値は次の表にまとめられる。

	$u(a,b)$	$u(b,c)$	$u(c,a)$	meaning
[1-1]	1	1	0	$a\succ b\succ c$
[1-2]	1	0	1	$c\succ a\succ b$
[1-3]	0	1	1	$b\succ c\succ a$
[2-1]	1	0	0	$a\succ c\succ b$
[2-2]	0	1	0	$c\succ a\succ b$
[2-3]	0	0	1	$c\succ b\succ a$
[3-1]	1	2	0	$a\succ b\sim c$
[3-2]	1	0	2	$a\sim c\succ b$
[3-3]	2	1	0	$a\sim b\succ c$
[3-4]	2	0	1	$c\succ a\sim b$
[3-5]	0	1	2	$b\succ a\sim c$
[3-6]	0	2	1	$b\sim c\succ a$
[4]	2	2	2	$a\sim b\sim c$

[1-2]－[3-6]においては $u(a,b),u(b,c),u(c,a)$ のいずれか少なくとも一つが 0 または 1 である。したがって、表のすべては過不足なく次の方程式で表現できる。

$$\begin{cases} u(a,b)\cdot u(b,c)\cdot u(c,a)=0, \text{ かつ} \\ (u(a,b)+2)\cdot(u(b,c)+2)\cdot(u(c,a)+2)=0, \end{cases}$$

or

$$u(a,b)=u(b,c)=u(c,a)=2.$$

$\succ\in\mathcal{P}$ とし、$v(d,e)=q(\succ,d,e),(d,e)\in T$ とすれば、v の推移性は[1-1]－[2-3]で表される。その代数的性質は上式の最初の 2 式で表される。

B 証明

B.1 定理 1 の証明

集合 $\{0,1\}^H$ に属する 3 つのベクトルを x,y,z とする。組 (x,y,z) が単峰的な選好プロファイルとして**許容可能**であるとは、ある単峰的な選好プロファイル $V\in\mathcal{SPH}$ と選択肢 $a,b,c\in A$、$a<b<c$ が存在して、

$$x=V^{(a,b)},\quad y=V^{(b,c)},\quad z=V^{(c,a)},$$

となることである。ここで、V^t は行列 V の第 t 列であり、$<$ は V に付属する A 上の線形順序である。

補助定理 4　ベクトルの組 (x,y,z) がある単峰的な選好プロファイルについて許容可能であるとする。A の任意の線形順序 $\tilde{<}$ について、(x,y,z) を許容可能とし $\tilde{<}$ を付属する線形順序とする単峰的な選好プロファイルが存在する。

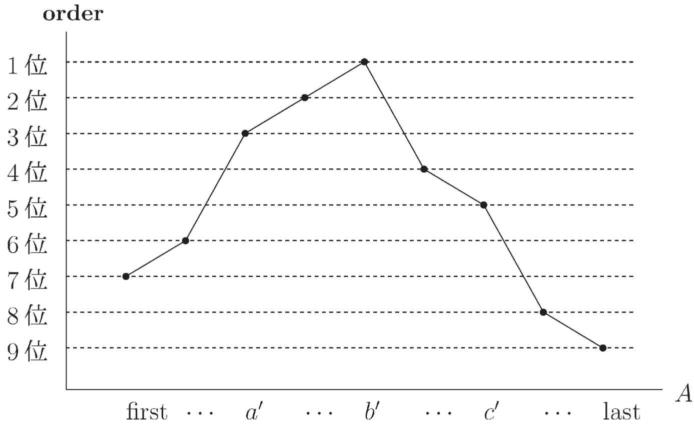

図1　$x(h)=0, y(h)=1$ **のケース**

証明　これは容易であるので、目標のプロファイル $\tilde{V}$ の構築のためのスケッチを示しておく。$V \in \mathcal{SPH}$ について、$x = V^{(a,b)}, y = V^{(b,c)}, z = V^{(c,a)}$，$a < b < c$ とする。ここで、$<$ は V に付属する線形順序である。$\tilde{<}$ を任意の線形順序とする。いま、$a', b', c' \in A$ 、$a' \tilde{<} b' \tilde{<} c'$ とする。そこで、$\tilde{V}$ を

$$
\begin{aligned}
&\tilde{V}^{(d,a')} = \mathbf{0}, \text{ if } d \tilde{<} a' \\
&\tilde{V}^{(a',d)} = V^{(a,b)}, \text{ if } a' \tilde{<} d \tilde{<} b' \text{ or } d = b' \\
&\tilde{V}^{(b',d)} = V^{(b,c)}, \text{ if } b' \tilde{<} d < c' \text{ or } d = c' \\
&\tilde{V}^{(b',d)} = \mathbf{1}, \text{ if } c' \tilde{<} d \\
&\tilde{V}^{(c',a')} = V^{(c,a)}
\end{aligned}
$$

とし、残りの選択肢の組には推移性を保つように選好を定めれば、$\tilde{V} \in \mathcal{SPH}$ となるように定義できる。図1には上の $\tilde{V}$ と整合的な一つの例が示されている。他のケースも同様に絵に描くことができるが、証明のエッセンスは図に見ることができる。［証了］

補助定理 5　組 $(x,y,z) \in \left(\{0,1\}^H\right)^3$ が単峰的な選好プロファイルに許容可能となることの必要十分条件は

$$\begin{cases} x(h)\cdot(y(h)+2)=0, \\ x(h)\cdot y(h)\cdot z(h)=0, \\ (x(h)+2)\cdot(y(h)+2)\cdot(z(h)+2)=0. \end{cases}$$

である。最初の方程式は単峰性との整合性を、第 2 のものは推移性との整合性を表すものである。

証明　必要性は明らかである。任意の $(x,y,z) \in \left(\{0,1\}^H\right)^3$ が上の 3 つの方程式を満たすとする。A 上の線形順序 $<$ について、$a,b,c \in A,\ a<b<c$ とする。各 $h \in H$ について、$x(h)=0$ ならば $y(h)=0$ または $y(h)=1$ 、$x(h)=1$ ならば $y(h)=1$ である。したがって、補助定理 4 において $\tilde{V}$ を構成したのと全く同じ手続きで、(x,y,z) は $\tilde{V} \in \mathcal{SPH}$ によって許容可能となる。［証了］

補助定理 5 によって、任意の $x \in \{0,1\}^H$ について、

$$(\mathbf{0},x,2\cdot x+\mathbf{1}),(x,\mathbf{1},2\cdot x+\mathbf{1}),$$

は $\mathcal{SPH}$ で許容可能である。

補助定理 4 によって、$V \in \mathcal{SPH}$ について、V の線形順序を $<$ とする。$a,b,c \in A,\ a<b<c$ とするとき、$x=V^{(a,b)},\ y=V^{(b,c)}$ と定義する。このとき、ベクトルの組

$$(x,\mathbf{1},2\cdot y+\mathbf{1}),(\mathbf{0},y,2\cdot x+\mathbf{1})$$

は $\mathcal{SPH}$ で許容可能である。

定理 1 の証明：$F:\mathcal{SPH}\to\mathcal{R}$ をアロー的社会厚生関数とする。

V を $\mathcal{SPH}$ の選好プロファイル、$<$ を V に付属する A の線形順序とする。a, b, c を A に属する異なる3つの選択肢とし、$a < b < c$ とする。ベクトル x, y を $x = V^{(a,b)}$、$y = V^{(b,c)}$ とする。各 $h \in H$ に対して、$x(h) \cdot (y(h) + 2) = 0$ が成り立つ。以下では、許容可能でその中に x または y あるいはその両者を含むなベクトルの組をいくつか取り上げる。補助定理4と補助定理5によって、それらを許容可能にする単峰形選好プロファイルがある。さらに、それらのどの単峰形選好プロファイルにも V に付属する線形順序 $<$ が与えられていると考えることができる。

（i）最初に、$f_{(b,c)}(y) = 0$ のケースを取り上げる。組 $(\mathbf{0}, y, 2 \cdot y + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において明らかに許容可能である。$(\mathbf{T})$ によって、3つの値 $f_{(a,b)}(\mathbf{0}), f_{(b,c)}(y)$、そして $f_{(c,a)}(2 \cdot y + \mathbf{1})$ は⑴より等式 $(2 + f_{(a,b)}(\mathbf{0})) \cdot (2 + f_{(b,c)}(y)) \cdot (2 + f_{(c,a)}(2 \cdot y + \mathbf{1})) = 0$ を満たす。これは、$f_{(c,a)}(2 \cdot y + \mathbf{1}) = 1$ である。同様に、組 $(x, \mathbf{1}, 2 \cdot y + \mathbf{1})$ も $\mathcal{SPH}$ において許容可能である。⑴より $f_{(a,b)}(x) \cdot 1 \cdot f_{(c,a)}(2 \cdot y + \mathbf{1}) = 0$、つまり、$f_{(a,b)}(x) = 0$ を得る。

（ii）次に $f_{(a,b)}(x) = 1$ となる場合を考察する。組 $(x, \mathbf{1}, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において許容可能であるので、⑴の前半より、$f_{(a,b)}(x) \cdot 1 \cdot f_{(c,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 0$ を得る。これは $f_{(c,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 0$ である。組 $(\mathbf{0}, y, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ もまた $\mathcal{SPH}$ において許容可能である。したがって、⑴の後半より、$f_{(b,c)}(y) = 1$ を得る。

（iii）次に、$f_{(a,b)}(x) = 2$ となるケースを取り上げる。組 $(x, \mathbf{1}, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において許容可能である。したがって、$f_{(c,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 0$ である。さらに、組 $(x, y, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ に許容可能であるので、$f_{(b,c)}(y) = 1$ にいたる。

（iv）最後のケース $f_{(b,c)}(y) = 2$ を取り上げよう。組 $(\mathbf{0}, y, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ で許容可能である。これより $f_{(c,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 1$ を得る。さらに、組 $(x, y, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ も許容可能であるので、$f_{(a,b)}(x) = 0$ となる。

以上の（i）−（iv）の考察によって、$F(V)$ は単高原的であり、最大要素はた

かだか2である。さらに、$F(V)$ の単峰性の基礎となる A の線形順序は選好プロファイル V に付属する線形順序である。［証了］

B.2 補助定理1、2、3の証明

われわれはこのサブセクションで条件 (**C**) を満たし、$\mathcal{SPH}$ を定義域とするアロー的社会厚生関数の諸性質（補助定理1、2、3）を証明する。a,b を A の異なる選択肢とする。

ある $x \in \{0,1\}^H$ について $f_{(b,a)}(x)=0$ であったとする。(**SIV**) によって、これは $f_{(a,b)}(2\cdot x+\mathbf{1})=1$ に同値である。これは、(**C**) によって、$f_{(a,b)}(x)=0$ に同値である。再び、$f_{(b,a)}(2\cdot x+\mathbf{1})=1$ である。これらをまとめると、

$$f_{(b,a)}(x)=0 \Leftrightarrow f_{(a,b)}(2\cdot x+\mathbf{1})=1 \Leftrightarrow f_{(a,b)}(x)=0 \Leftrightarrow f_{(b,a)}(2\cdot x+\mathbf{1})=1$$

が成立する。同様にして、

$$f_{(b,a)}(x)=1 \Leftrightarrow f_{(a,b)}(2\cdot x+\mathbf{1})=0 \Leftrightarrow f_{(a,b)}(x)=1 \Leftrightarrow f_{(b,a)}(2\cdot x+\mathbf{1})=0.$$

も成立する。

補助定理1の証明

F を (**N**) をみたすアロー的社会厚生関数とする。$a,b,c\in A$ を相異なる選択肢とする。$y\in\{0,1\}^H$ を $f_{(a,b)}(y)=0$ を満たすベクトルとする。$x\in\{0,1\}^H$ を各 $h\in H$ について、$y(h)=0$ であれば $x(h)=0$ を満たすベクトルとする。

条件 (**N**) より $f_{(a,b)}(y)=f_{(b,c)}(y)=0$ である。3つのベクトルの組 $(y,y,2\cdot y+\mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において許容可能であるので、A 上の線形順序を $<$、$a,b,c\in A$、$a<b<c$ とすると、(**T**) によって、

$$(f_{(a,b)}(y)+2)\cdot(f_{(b,c)}(y)+2)\cdot(f_{(c,a)}(2\cdot y+\mathbf{1})+2)=0,$$

が成立する[12]。これは、 $f_{(c,a)}(2\cdot y+\mathbf{1})=1$ である。

3つのベクトルの組 $(x,\mathbf{1},2\cdot y+\mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において許容可能であるので、

$$f_{(a,b)}(x)\cdot 1\cdot f_{(c,a)}(2\cdot y+\mathbf{1})=0,$$

となる。これは $f_{(a,b)}(x)=0$ を導く。

2番目の命題「 $f_t(x)=1\Rightarrow f_t(y)=1$ 」は最初の命題の対偶であるので、成立するのは当然である。[証了]

補助定理 2 の証明

x を $\{0,1\}^H$ の任意の要素とする。a,b,c を異なる A の要素とする。3つのベクトルの組 $(x,\mathbf{1},2\cdot x+\mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ において許容可能である。このとき、補助定理4によって、 A 上の線形順序 $<$ は $a<b<c$ を満たすものにできる。(**T**)によって $f_{(a,b)}(x)\cdot 1\cdot f_{(c,a)}(2\cdot x+\mathbf{1})=0$ を得る。これは $f_{(a,b)}(x)=0$ または $f_{(c,a)}(2\cdot x+\mathbf{1})=0$ である。後者のケースを取り上げる。(**SIV**)によって、 $f_{(a,c)}(x)=1$ である。(**N**)によって、 $f_{(a,b)}(x)=1$ である。従って、前者と後者のケースは、任意の $t\in T$ について $f_t(x)=0$ または1となる。この事実と定理1によって証明は完了である。[証了]

補助定理 3 の証明

F を $\mathcal{SPH}$ を定義域、 $\mathcal{R}$ を値域とするアロー的社会厚生関数とする。

(**N**) $\Rightarrow$ (**C**)を示そう。 F が(**N**)を満たすとする。a,b,c を異なる A の要素とし、 x を $\{0,1\}^H$ の任意の要素とする。 $f_{(a,b)}(x)=0$ となったとする。3つのベクトルの組 $(x,x,2\cdot x+\mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ で許容可能である。補助定理4より、単峰性を満たす選好プロファイル V と V に付属する線形順序 $<$ が存在して、 $a<b<c$ 、 $V^{(a,b)}=x,V^{(b,c)}=x,V^{(c,a)}=2\cdot x+\mathbf{1}$ を満たす。(**T**)より、

12) このように A 上の線形順序をとることができるのは、補助定理4による。

$f_{(c,a)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 1$ である。さらに、(**N**) より $f_{(a,b)}(2 \cdot x + \mathbf{1}) = 1$ である。これと同じ議論を $f_{(a,b)}(x) = 1$ のケースにも適用可能である。
(**C**) ⇒ (**N**) を示そう。F を共変的であるとする。最初に、任意の相異なる $a, b, c \in A$、任意の $x \in \{0,1\}^H$ について、$f_{(a,b)}(x) \neq 2$ であれば $f_{(a,b)}(x) = f_{(b,c)}(x) = f_{(c,a)}(x)$ となることを示そう。

$f_{(a,b)}(x) = 1$ とする。3 つのベクトル $(x, \mathbf{1}, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は $\mathcal{SPH}$ で許容可能であるので、補助定理 4 より、単峰性を満たす選好プロファイル V と V に付属する線形順序 $<$ が存在して、$a < b < c$、$V^{(a,b)} = x, V^{(b,c)} = \mathbf{1}, V^{(c,a)} = 2 \cdot x + \mathbf{1}$ とできる。(**T**) と (**C**) によって、$f_{(c,a)}(x) = 1$ である。さらに、3 つのベクトル $(\mathbf{0}, x, 2 \cdot x + \mathbf{1})$ は A 上の同一の線形順序を有する単峰形選好プロファイル V' のもとで許容可能で、$a < b < c$ かつ $V'^{(a,b)} = \mathbf{0}$, $V'^{(b,c)} = x$, $V'^{(c,a)} = 2 \cdot x + \mathbf{1}$ とできる。したがって、(**T**) と (**C**) によって、$f_{(b,c)}(x) = 1$ が得られる。$f_{(a,b)}(x) = 0$ のケースにも全く同じ議論を繰り返すことができ、$f_{(a,b)}(x) = f_{(b,c)}(x) = f_{(c,a)}(x) = 0$ である。

次に、任意の $(a,b), (c,d) \in T$, $x \in \{0,1\}^H$ について、$f_{(a,b)}(x) \neq 2$ であれば $f_{(a,b)}(x) = f_{(c,d)}(x)$ となることを示そう。A 上の線形順序 $<$ を $a < b$、$c < d$ かつ $a < c$ を満たすと想定できる。$b < c$ であれば、$a < b < c$ かつ $b < c < d$ であるので、上の結果から $f_{(a,b)}(x) = f_{(b,c)}(x) = f_{(c,d)}(x)$ である。他方、$c < b$ であれば、$f_{(a,c)}(x) = f_{(c,b)}(x) = f_{(b,a)}(x)$ かつ $f_{(c,b)}(x) = f_{(b,d)}(x) = f_{(d,c)}(x)$ である。したがって、

$$f_{(a,b)}(x) = f_{(b,a)}(x) = f_{(c,b)}(x) = f_{(d,c)}(x) = f_{(c,d)}(x).$$

に至る。［証了］

Majority Voting: A Characterization by the Arrovian Social Welfare Function on the Single Peaked Preference Domain

Tomoyuki Kamo・Jun Iritani

ABSTRACT

We construct an algebraic model of social choice theory in this paper. We show that the ordering by majority voting is identical with that by an Arrovian social welfare function on the domain of single peaked preference profiles under the assumptions of anonymity and covariancy. The condition "covariancy" is a weak version of May's neutrality and plays an very important role in this paper. Furthermore, we give answers to two more questions Moulin［10］raised as knotty problems to incorporate single peaked preference into Arrovian theory.

Keywords：Arrovian social welfare function; single-peaked preferences; majority voting; arithmetic in a finite field.

JEL Classification Numbers：D71; D72.